

Đề thi gồm 01 trang

Môn thi: **Toán**

Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1: (5 điểm)

- a) Với n là số nguyên dương chẵn, chứng minh rằng: $20^n + 16^n - 3^n - 1$ chia hết cho 323 .
b) Cho $C = \underbrace{44 \dots 44}_n \underbrace{88 \dots 88}_{n-1}$. Chứng tỏ rằng C là một số chính phương.

Câu 2: (5 điểm)

- a) Giải phương trình sau: $x^2 + 5x + 1 = (x + 5)\sqrt{x^2 + 1}$.
b) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \end{cases}$$

Câu 3: (5 điểm)

- a) Chứng minh rằng: $(a + b + c + d)^2 \geq \frac{8}{3}(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
b) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} .$$

Câu 4: (5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Trên cung nhỏ AD lấy điểm E (E không trùng với A và D) . Tia EB cắt các đường thẳng AD, AC lần lượt tại I và K . Tia EC cắt các đường thẳng DA, DB lần lượt tại M, N . Hai đường thẳng AN và DK cắt nhau tại P .

- a) Chứng minh rằng các tứ giác $IABN$ và $EPND$ nội tiếp được đường tròn.
b) Chứng minh rằng KM là tia phân giác của góc EKD .
c) Khi điểm M ở vị trí trung điểm của AD , hãy xác định độ dài đoạn thẳng AE theo R .

----- **Hết** -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ, tên thí sinh:Số báo danh:

Chữ ký của cán bộ coi thi 1:; Chữ ký của cán bộ coi thi 2:

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

Câu 1: (5 điểm)

a) Với n là số nguyên dương chẵn, chứng minh rằng: $20^n + 16^n - 3^n - 1$ chia hết cho 323.

b) Cho $C = \underbrace{44\dots4}_n \underbrace{88\dots8}_{n-1} 9$. Chứng tỏ rằng C là một số chính phương.

Lời giải

a) Ta có : $20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 1) + (16^n - 3^n)$

Và $(20^n - 1) : 19$ (vì $20 - 1 = 19$)

$(16^n - 3^n) : 19$ (vì n chẵn)

$\Rightarrow (20^n + 16^n - 3^n - 1) : 19.$ (1)

Mặt khác : $20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 3^n) + (16^n - 1)$

Và $(20^n - 3^n) : 17$ (vì $20 - 3 = 17$), $(16^n - 1) : 17$ (vì n chẵn)

$\Rightarrow (20^n + 16^n - 3^n - 1) : 17.$ (2)

Từ (1); (2) $\Rightarrow (20^n + 16^n - 3^n - 1) : 323$

b) Ta có: $A = \underbrace{444\dots4}_n \underbrace{888\dots8}_{n-1} 9 = \underbrace{444\dots4}_n \underbrace{100\dots0}_n + \underbrace{888\dots8}_n + 1$

$$A = 4 \cdot \underbrace{111\dots1}_n \cdot \left(\underbrace{999\dots9}_n + 1 \right) + 8 \cdot \underbrace{111\dots1}_n + 1$$

$$A = 36 \cdot \left(\underbrace{111\dots1}_n \right)^2 + 12 \cdot \underbrace{111\dots1}_n + 1$$

$$A = \left(\underbrace{666\dots6}_n \right)^2 + 2 \cdot \left(\underbrace{666\dots6}_n \right) + 1 = \left(\underbrace{666\dots6}_n + 1 \right)^2$$

$$A = \left(\underbrace{666\dots67}_{n-1} \right)^2 \text{ là số chính phương (đpcm).}$$

Câu 2: (5 điểm)

a) Giải phương trình sau: $x^2 + 5x + 1 = (x + 5)\sqrt{x^2 + 1}$

b) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \end{cases}$$

Lời giải

a) $x^2 + 5x + 1 = (x + 5)\sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow (x + 5)(x - \sqrt{x^2 + 1}) = -1$

Nhân liên hợp ta có $x + 5 = x + \sqrt{x^2 + 1}$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 24 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{6}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \pm 2\sqrt{6}$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 & (1) \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có $(x^2 + y^2) = 7 - xy$ thay vào phương trình (2) ta có

$$x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = 21 \Rightarrow (7 - xy)^2 - x^2y^2 = 21$$

$$\Leftrightarrow 49 - 14xy + x^2y^2 - x^2y^2 = 21 \Rightarrow xy = 2$$

Ta có $x^2 + y^2 + xy = 7 \Rightarrow (x + y)^2 - xy = 7 \Leftrightarrow (x + y)^2 = 7 + xy = 9 \Rightarrow (x + y) = \pm 3$.

Xét các trường hợp

$$+) \ x + y = 3 \text{ mà } xy = 2 \Rightarrow (x; y) \in \{(1; 2); (2; 1)\}.$$

$$+) \ x + y = -3 \text{ mà } xy = -2 \Rightarrow (x; y) \in \{(-1; -2); (-2; -1)\}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(1; 2); (2; 1); (-1; -2); (-2; -1)$.

Câu 3: (5 điểm)

a) Chứng minh rằng: $(a + b + c + d)^2 \geq \frac{8}{3}(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

b) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y}.$$

Lời giải

a) Ta có $(a + b + c + d)^2 \geq \frac{8}{3}(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \geq \frac{8}{3}(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - c)^2 + (a - d)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\Leftrightarrow a = b = c = d$.

b)

Vì $x, y, z > 0$ nên áp dụng BĐT Côsi đối với hai số dương $\frac{x^2}{y+z}$ và $\frac{y+z}{4}$ ta được:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} = 2 \cdot \frac{x}{2} = x. \quad (1)$$

Tương tự ta có:
$$\frac{y^2}{z+x} + \frac{z+x}{4} \geq y. \quad (2)$$

$$\frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq z. \quad (3)$$

Cộng (1)+(2)+(3), ta được: $P \geq x + y + z - \frac{x+y+z}{2} = 1$.

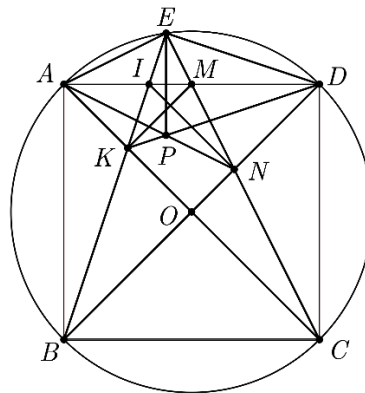
Dấu "=" xảy ra $x = y = z = \frac{2}{3}$. Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$.

Câu 4: (5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Trên cung nhỏ AD lấy điểm E (E không trùng với A và D). Tia EB cắt các đường thẳng AD, AC lần lượt tại I và K . Tia EC cắt các đường thẳng DA, DB lần lượt tại M, N . Hai đường thẳng AN và DK cắt nhau tại P .

- Chứng minh rằng các tứ giác $IABN$ và $EPND$ nội tiếp được đường tròn.
- Chứng minh rằng KM là tia phân giác của góc EKD .
- Khi điểm M ở vị trí trung điểm của AD , hãy xác định độ dài đoạn thẳng AE theo R .

Lời giải



a) Ta kí hiệu $\widehat{BC}$ là số đo cung BC . Ta có BD là đường trung trực của AC nên $\widehat{ANB} = \widehat{BNC}$, ta cũng có $\widehat{NAC} = \widehat{NCA}$.

Xét (O) ta có $\widehat{BNC} = \frac{1}{2}(\text{sd}\widehat{BC} + \text{sd}\widehat{DE})$, $\widehat{BIA} = \frac{1}{2}(\text{sd}\widehat{AB} + \text{sd}\widehat{DE})$ mà $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ từ đó suy ra

$$\widehat{AIB} = \widehat{ANB}.$$

Xét (O) ta có $\widehat{AIB} = \widehat{ANB}$ mà hai đỉnh I và N kề nhau cùng nhìn cạnh AB do đó tứ giác $IABN$ nội tiếp được một đường tròn.

Chứng minh tương tự câu a ta có tứ giác $CDMK$ nội tiếp, suy ra $\widehat{MKD} = \widehat{MCD}$. (1)

Ta cũng suy ra $\widehat{MCK} = \widehat{MDK} = \widehat{ADE}$ nên $\widehat{ENP} = 2\widehat{NCA}$ và $\widehat{EDP} = 2\widehat{EDA} = 2\widehat{NCA}$.

Xét tứ giác $EPND$ có $\widehat{ENP} = \widehat{EDP} = 2\widehat{NCA}$, mà hai đỉnh N và D cùng nhìn cạnh EP ta suy ra tứ giác $EPND$ nội tiếp được một đường tròn.

b) Vì tứ giác $CDMK$ nội tiếp nên suy ra $\widehat{MKC} = \widehat{MDC} = 90^\circ$ nên $\widehat{MKA} = \widehat{MEA} = 90^\circ$. (2)

Xét tứ giác $AKME$ có $\widehat{MKA} + \widehat{MEA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà hai góc này đối nhau suy ra tứ giác $AKME$ nội tiếp, suy ra $\widehat{MAE} = \widehat{MKE}$.

Ta lại có $\widehat{MAE} = \widehat{MCD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DE). (3)

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $\widehat{MKD} = \widehat{MKE}$ hay KM là tia phân giác của $\widehat{DKE}$.

c) Vì M là trung điểm của $AD \Rightarrow AM = MD = \frac{1}{2}AD$.

Xét $\triangle MDC$ và $\triangle MEA$ ta có: $\widehat{EMA} = \widehat{DMC}$ (đối đỉnh) và $\widehat{AEM} = \widehat{MDC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle MDC \sim \triangle MEA (g - g)$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{EA} = \frac{MD}{ME} = \frac{MC}{MA} \Leftrightarrow MD \cdot MA = ME \cdot MC = MD^2 = \frac{CD^2}{4}$$

Áp dụng định lý Pitago cho $\triangle MCD$ vuông tại D ta có:

$$MC^2 = CD^2 + MD^2 = CD^2 + \frac{CD^2}{4} = \frac{5}{4}CD^2$$

$$\Rightarrow MC = \frac{\sqrt{5}}{2}CD \Rightarrow ME = \frac{CD^2}{4MC} = \frac{CD^2}{4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}CD} = \frac{CD}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{Ta có } \frac{CD}{EA} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow EA = \frac{CD \cdot MA}{MC} = \frac{CD \cdot \frac{CD}{2}}{\frac{\sqrt{5}CD}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}CD, \text{ ta lại có}$$

$$R = OC = \frac{CD\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CD = R\sqrt{2} \Rightarrow EA = \frac{\sqrt{5}}{5}CD = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot R\sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}}{5}R.$$

$$\text{Vậy } AE = \frac{\sqrt{10}}{5}R.$$