ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2024-2025
TỈNH THÁI BÌNH

Bài 1. (3.0 điểm)

l. Cho các số thực dương thỏa mãn: $b(a+1)=1-a$

Tinh giá trị của biểu thức:

$$P=a\sqrt{\frac{1+b^2}{1+a^2}}+b\sqrt{\frac{1+a^2}{1+b^2}}+\sqrt{\frac{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}{4}}$$

2. Chứng minh: $B=\sqrt{1+2023^2+\frac{2023^2}{2024^2}}+\frac{2023}{2024}$ là số tự nhiên.

Bài 2. (3,0 điểm)

l. Trên truc toa dô Oxy cho điểm hai điểm $A(-1;1)$, $B(-5;-3)$ và đường thẳng (d): $y=ax+b$

a) Tinh diện tích tam giác OAB.

b) Tìm a và b biết đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AB và tiếp xúc đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R=4\sqrt{2}$.

2. Cho da thức $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ với a,b là các số hữu ti. Biết đa thức đã cho có một nghiệm là $x=2-\sqrt{3}$, tìm các nghiệm còn lại của đa thức.

Bài 3 (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $4x^2+3x+2=3\sqrt{x^3+3x^2+3x+2}$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+\sqrt{x-y}=2y+1+\sqrt{y+1}\\8x^3-52y^2-15x+11=(x+3).\sqrt[3]{12y^2+6x-5}\end{cases}$

Bài 4. (2,0 điểm)

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$. Tim giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q=\frac{x^2+yz}{x\sqrt{y+z}}+\frac{y^2+zx}{y\sqrt{z+x}}+\frac{z^2+xy}{z\sqrt{x+y}}$$

Bài 5 (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AM,BN,CP cắt nhau tại H. Gọi K,Q lần lượt là giao điểm cùa NP với AH và AO, I là trung điểm cùa AH.

l. Chứng minh: $IN^2=1K.1M$.

2. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BN và CP. Chứng minh EF vuông góc với QM.

Bài 6. (3,0 điểm)

Cho đường thẳng (d) và đường tròn $(O;R)$ không giao nhau. Trên đường thẳng (d) lấy điểm A. Từ điểm A kẻ tiếp tuyến AB, AC Với $(O;R)$, (B,C là tiếp điểm) và cát tuyến ADE không di qua tâm O, (D nằm giữa A và E). Goi I là trung điểm cùa DE. Đường thẳng BC cắt OA và OI lần lượt tại H và K.

l. Chứng minh rằng KE là tiếp tuyén cùa $(O;R)$.

2. Chứng minh rằng khi A di động trên (d) thì H di động trên một đường tròn cố định.

Bài 7. (2,0 điểm)

Cho a,b là các số nguyên, $a \neq -1, b \neq -1$ thỏa mãn: $\dfrac{(a-1)(a+1)^2+(b-1)(b+1)^2}{a+b+ab+1}$ là số nguyên.

Chứng minh: $a^{2023}b^{2023}-a$ chia hết cho a^2+a.

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Bài 1. (3.0 điểm)

l. Cho các số thực dương a,b thỏa mãn: $b(a+1)=1-a$

Tinh giá trị cùa biểu thức:

$$P=a\sqrt{\frac{1+b^2}{1+a^2}}+b\sqrt{\frac{1+a^2}{1+b^2}}+\sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{4}}$$

2. Chứng minh: $B=\sqrt{1+2023^2+\frac{2023^2}{2024^2}}+\frac{2023}{2024}$ là số tự nhiên.

Lời giải.

1. Từ giả thiết, ta có $ab+a+b=1$. Thế vào P ta có: $P=a\sqrt{\frac{1+b^2}{1+a^2}}+b\sqrt{\frac{1+a^2}{1+b^2}}+\sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{4}}$

$$=a\sqrt{\frac{ab+a+b+b^2}{ab+a+b+a^2}}+b\sqrt{\frac{ab+a+b+a^2}{ab+a+b+b^2}}+\sqrt{\frac{(ab+a+b+a^2)(ab+a+b+b^2)}{4}}$$

$$=a\sqrt{\frac{(a+b)(b+1)}{(a+b)(a+1)}}+b\sqrt{\frac{(a+b)(a+1)}{(a+b)(b+1)}}+\sqrt{\frac{(a+b)(a+1)(a+b)(b+1)}{4}}$$

$$=a\sqrt{\frac{b+1}{a+1}}+b\sqrt{\frac{a+1}{b+1}}+(a+b)\sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{4}}$$

$$=\sqrt{(a+1)(b+1)}\left(\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{a+b}{2}\right)$$

$$=\sqrt{ab+a+b+1}\left(2+\frac{a+b}{2}-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}.\left(2+\frac{a+b}{2}-\frac{a+b+2}{(a+1)(b+1)}\right)$$

$$=\sqrt{2}.\left(2+\frac{a+b}{2}-\frac{a+b+2}{ab+a+b+1}\right)$$

$$=\sqrt{2}.\left(2+\frac{a+b}{2}-\frac{a+b+2}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}.(2-1)=\sqrt{2}$$

Vậy $P=\sqrt{2}$ khi tồn tại các số thực dương a,b thỏa mãn: $b(a+1)=1-a$.

2. Ta có:

$$B=\sqrt{1+2023^2+\frac{2023^2}{2024^2}}+\frac{2023}{2024}$$

$$=\sqrt{(1+2023)^2-2.2023+\frac{2023^2}{2024^2}}+\frac{2023}{2024}$$

$$=\sqrt{2024^2-2.2024.\frac{2023}{2024}+\frac{2023^2}{2024^2}}+\frac{2023}{2024}$$

$$= \sqrt{\left(2024 - \frac{2023}{2024}\right)^2} + \frac{2023}{2024}$$

$$= 2024 - \frac{2023}{2024} + \frac{2023}{2024}$$

$$= 2024$$

Do 2024 là số tự nhiên nên ta có đpcm.

Bài 2. (3,0 điểm)

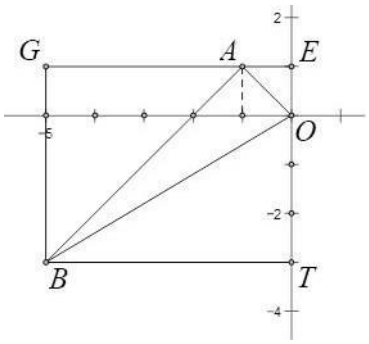
l. Trên truc toa dô Oxy cho điểm hai điểm $A(-1;1)$, $B(-5;-3)$ và đường thẳng (d): $y = ax + b$

a) Tinh diện tích tam giác OAB.

b) Tìm a và b biết đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AB và tiếp xúc đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R = 4\sqrt{2}$.

2. Cho da thüc $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ với a,b là các số hữu ti. Biết đa thức đã cho có ột nghiệm là $x = 2 - \sqrt{3}$, tìm các nghiệm còn lại của đa thức.

Lời giải.



I a) Dựng hình chữ nhật $GETB$ như hình vẽ dưới đây. Theo bài ra ta có:

$AG = |x_G - x_A| = |-5 - (-1)| = 4$.

Tương tự ta có: $AE = OE = 1$; $BG = 4$; $OT = 3$; $BT = 5$.

$\Rightarrow S_{GEBT} = BG.BT = 4.5 = 20$; $S_{GAB} = \frac{BG.AG}{2} = \frac{4.4}{2} = 8$;

$S_{OAE} = \frac{OE.AE}{2} = \frac{1.1}{2} = \frac{1}{2}$; $S_{OTB} = \frac{OT.BT}{2} = \frac{3.5}{2} = \frac{15}{2}$.

$\Rightarrow S_{OAB} = S_{GEBT} - S_{GAB} - S_{OAE} - S_{OTB} = 20 - 8 - \frac{1}{2} - \frac{15}{2} = 4$(đvdt).

Vậy $S_{OAB} = 4$(đvdt).

1b) Gọi đường thẳng (AB): $y = mx + k$ đi qua $A(-1;1)$, $B(-5;-3)$ nên

$\begin{cases} -m + k = 1 \\ -5m + k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow (AB): y = x + 2$. Vì $(d) \perp (AB)$ nên $a = -1$, khi đó $(d): y = -x + b$

Giả sử (d) tiếp xúc với $(O;4\sqrt{2})$ tại K và vuông góc với (AB) tại H. Dễ thấy $AOKH$ là hình chữ nhật. Suy ra $OH = OK = 4\sqrt{2}$. Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + b \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{b-2}{2}; y = \frac{b+2}{2}$. Suy ra $H\left(\frac{b-2}{2}; \frac{b+2}{2}\right) \Rightarrow AH = \frac{|b|}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 4\sqrt{2} = \frac{|b|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |b| = 8 \Leftrightarrow b = \pm 8$. Vậy $(a;b) \in \{(-1;-8);(-1;8)\}$ lafgias trị cần tìm.

2. Do $x = 2 - \sqrt{3}$ là nghiệm của $f(x) \Rightarrow f\left(2 - \sqrt{3}\right) = 0$

Thế $x = 2 - \sqrt{3}$ vào $f(x)$, ta có: $f\left(2 - \sqrt{3}\right) = \left(2 - \sqrt{3}\right)^3 + a\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(2 - \sqrt{3}\right) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (7a + 2b + 28) - (4a + b + 15)\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 7a + 2b + 28 = (4a + b + 15)\sqrt{3}$

Do $a,b \in Q$ nên $7a + 2b + 28$ là số hữu tỉ, $(4a + b + 15)\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Từ đó để phương trình trên thỏa mãn $\Rightarrow \begin{cases} 7a+2b+28=0 \\ 4a+b+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-7 \end{cases}$ (thỏa mãn $a,b \in Q$).

$\Rightarrow f(x) = x^3+ax^2+bx+2 = x^3-2x^2-7x+2 = (x+2)(x^2-4x+1)$.

Gọi k là một nghiệm của $f(x)$, ta có:

$\Rightarrow f(k)=0 \Leftrightarrow (k+2)(k^2-4k+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} k+2=0 \\ k^2-4k+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-2 \\ k=2\pm\sqrt{3} \end{cases}$

Vậy nghiệm còn lại của $f(x)$ là $x=-2; x=2+\sqrt{3}$

Bài 3 (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $4x^2+3x+2=3\sqrt{x^3+3x^2+3x+2}$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x-y}=2y+1+\sqrt{y+1} \\ 8x^3-52y^2-15x+11=(x+3).\sqrt[3]{12y^2+6x-5} \end{cases}$

Lời giải

1. ĐKXĐ: $x \ge 2$

Phương trình tương đương:

$4x^2+3x+2=3\sqrt{x^3+3x^2+3x+2}$

$\Leftrightarrow 4x^2+3x+2=3\sqrt{(x^3+3x^2+3x+1)+1}$

$\Leftrightarrow 4x^2+3x+2=3\sqrt{(x+1)^3+1}$

$\Leftrightarrow 4x^2+3x+2=3\sqrt{(x+2)(x^2+x+1)}$.

Đặt $\sqrt{x+2}=a; \sqrt{x^2+x+1}=b$ (ĐK: $a \ge 0; b \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$) $\Rightarrow 4b^2-a^2=4(x^2+x+1)-(x+2)=4x^2+3x+2$.

Ta có phương trình ẩn a,b: $4b^2-a^2=3ab \Leftrightarrow a^2+3ab-4b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)(a+4b)=0$

Do $a \ge 0; b \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a+4b \ge 0+4.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}>0$. Kết hợp phương trình trên ta có $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{x^2+x+1} \Rightarrow x+2=x^2+x+1 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{\pm 1\}$.

2. ĐKXĐ: $x \ge y \ge 1$.

Xét phương trình đầu tiên, ta có: $x+\sqrt{x-y}-2y-1-\sqrt{y+1}=0 \Leftrightarrow (x-2y-1)+(\sqrt{x-y}-\sqrt{y+1})=0$

$\Leftrightarrow (x-2y-1)+\frac{(x-y)-(y+1)}{\sqrt{x-y}+\sqrt{y+1}}=0 \Leftrightarrow (x-2y-1)+\frac{x-2y-1}{\sqrt{x-y}+\sqrt{y+1}}=0$

$\Leftrightarrow (x-2y-1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x-y}+\sqrt{y+1}}\right)=0$. Vì $1+\frac{1}{\sqrt{x-y}+\sqrt{y+1}}>1>0 \Leftrightarrow x-2y-1=0 \Leftrightarrow 2y=x-1$ (1)

Thế (1) vào phương trình thứ hai ta được: $8x^3-13(x-1)^2-15x+11=(x+3)\sqrt[3]{3(x-1)^2+6x-5}$

$\Leftrightarrow 8x^3-13x^2+11x-2=(x+3)\sqrt[3]{3x^2-2} \Leftrightarrow 8x^3-13x^2+11x-2-(x+3)\sqrt[3]{3x^2-2}=0$

$$\Leftrightarrow 8x^3-13x^2+11x-2-(x-3)(2x-1)+(x+3)\left(2x-1-\sqrt[3]{3x^2-2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 8x^3-15x^2+6x+1+(x+3)\frac{(2x-1)^3-(3x^2-2)}{(2x-1)^2+(2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2}+\sqrt[3]{(3x^2-2)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow 8x^3-15x^2+6x+1+(x+3)\frac{8x^3-15x^2+6x+1}{(2x-1)^2+(2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2}+\sqrt[3]{(3x^2-2)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (8x^3-15x^2+6x+1)\left(1+\frac{x+3}{(2x-1)^2+(2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2}+\sqrt[3]{(3x^2-2)^2}}\right)=0$$

Với $x\ge 1$ ta dễ thấy $1+\frac{x+3}{(2x-1)^2+(2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2}+\sqrt[3]{(3x^2-2)^2}}>1>0$

$$\Rightarrow 8x^3-15x^2+6x+1=0\Leftrightarrow (x-1)^2(8x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{1}{8}\end{array}\right.$$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Với $x=1$ thế vào (1) ta có: $2y=x-1=1-1=0\Leftrightarrow y=0$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Với $x=-\frac{1}{8}$ thế vào (1) ta có: $2y=x-1=-\frac{1}{8}-1=-\frac{9}{8}\Leftrightarrow y=-\frac{9}{16}$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy $(x;y)\in\left\{(1;0);\left(-\frac{1}{8};-\frac{9}{16}\right)\right\}$.

Bài 4. (2,0 điểm)

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q=\frac{x^2+yz}{x\sqrt{y+z}}+\frac{y^2+zx}{y\sqrt{z+x}}+\frac{z^2+xy}{z\sqrt{x+y}}$$

Lời giải

Đặt $\sqrt{x}=a;\sqrt{y}=b;\sqrt{z}=c$ (ĐK: $a,b,c>0;a+b+c=1$).

$$\Rightarrow Q=\frac{x^2+yz}{x\sqrt{y+z}}+\frac{y^2+zx}{y\sqrt{z+x}}+\frac{z^2+xy}{z\sqrt{x+y}}=\frac{a^4+b^2c^2}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b^4+c^2a^2}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c^4+a^2b^2}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\left(\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}-\sqrt{b^2+c^2}\right)+\left(\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}-\sqrt{c^2+a^2}\right)+\left(\frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}-\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

$$=\left(\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}\right)-\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)$$

Áp dụng BĐT Bunhia, ta có:

$$\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$\geq \frac{\left(a^2+bc\right)\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{bc\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}} = \frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{ac\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}$$

$$\frac{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{ab\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\geq \frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{bc\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{c^2+a^2}} +$$

$$+ \frac{ac\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{b^2\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{ab\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \left| \frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| +$$

$$+ \left| \frac{ac\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{b^2\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{bc\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{ab\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{c^2\sqrt{a^2+b^2}} \right| \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức cauchy, ta lại có:

$$\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{\sqrt{c^2+a^2}} \right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$\geq \sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}{\sqrt{b^2+c^2}} \cdot \frac{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{\sqrt{c^2+a^2}}} + \sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{\sqrt{c^2+a^2}} \cdot \frac{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}{\sqrt{b^2+c^2}} \cdot \frac{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{ac\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{bc\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{ab\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\geq a\sqrt{\frac{b^2+c^2}{bc}}+b\sqrt{\frac{a^2+c^2}{ac}}+c\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}}$$

$$\Rightarrow VP_{(1)}\geq\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+a\sqrt{\frac{b^2+c^2}{bc}}+b\sqrt{\frac{a^2+c^2}{ac}}+c\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}}$$

$$\geq\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+a\sqrt{\frac{2bc}{bc}}+b\sqrt{\frac{2ac}{ac}}+c\sqrt{\frac{2ab}{ab}}\ \text{(Áp dụng BĐT cauchy)}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+(a+b+c)\sqrt{2}=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{2}\quad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}\geq\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{2}$$

$$Q=\left(\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}\right)-\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)$$

$$\geq\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)=\sqrt{2}$$

Vậy $MinQ=\sqrt{2}$. Đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hay $x=y=z=\frac{1}{9}$

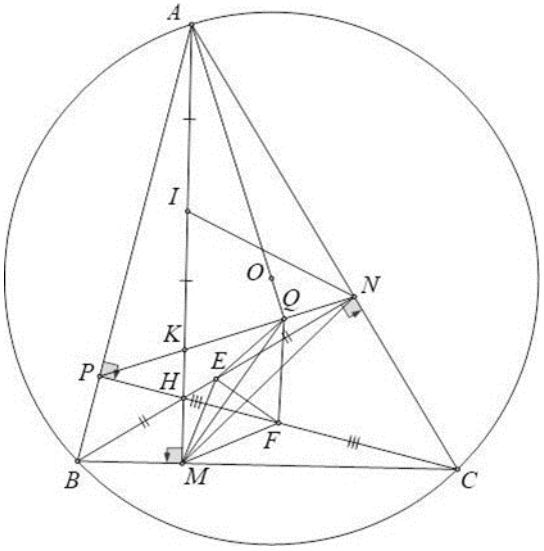
Bài 5 (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AM,BN,CP cắt nhau tại H. Gọi K,Q lần lượt là giao điểm cùa NP với AH và AO, I là trung điểm cùa AH.

l. Chứng minh: $IN^2=1K.1M$.

2. Gọi E và F lần lượt là trung điểm cùa BN và CP. Chứng minh EF vuông góc với QM.

Lời giải



1. Xét ΔANB và ΔAPC có BAC chung: $ANB = APC = 90^o \Rightarrow \Delta ANB \sim \Delta APC(g.g) \Rightarrow \dfrac{AN}{AP} = \dfrac{AB}{AC}(1)$.

Xét ΔANP và ΔABC có (1) và BAC chung $\Rightarrow \Delta ANP \sim \Delta ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow ANP = ABC$.

Tương tự ta có $MNC = ABC \Rightarrow MNC = ANP \Leftrightarrow 90^o - MNC = 90^o - ANP \Leftrightarrow PNH = MNH\,(2)$.

Xét ΔANH vuông ở N có I là trung điểm $AK \Rightarrow IN = IA = IB$ hay ΔINH cân ở $I \Rightarrow INH = IHN$

$\Leftrightarrow INK + KNH = IHN$. Mà $IHN = IMN + MNH$ (góc ngoài của ΔMNH)

$\Rightarrow INK + KNH = IMN + MNH$

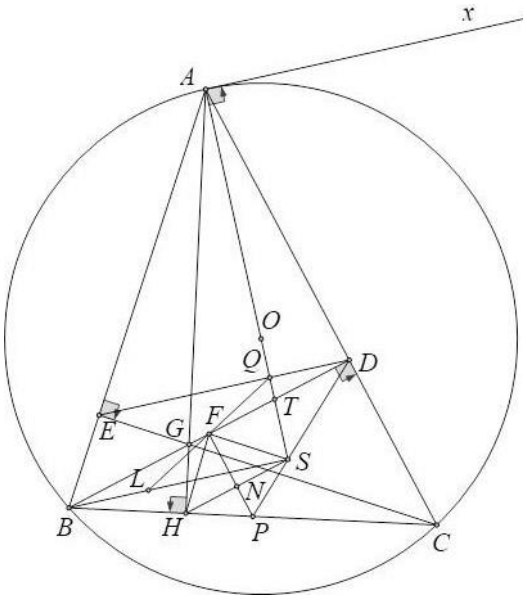
Kết hợp với $(2) \Rightarrow INK = IMN\,(3)$.

Xét ΔINK và ΔIMN có (3) và MIN chung

$\Rightarrow \Delta INK \sim \Delta IMN$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{IN}{IK} = \dfrac{IM}{IN} \Rightarrow IN^2 = IK.IM$ (đpcm).

2. Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề: Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AH, BD, CE cắt nhau ở G. Gọi F là trung điểm của BD, Q là giao điểm của AO và DE. Chứng minh rằng $QF = HF$.



Kẻ tiếp tuyến Ax (tia Ax khác phía B với bờ AC). Qua B kẻ đường thẳng song song với DE, cắt AO tại S. Gọi P, T, L, N lần lượt là giao điểm của DS và BC, BD và AO, QF và BS, SH và PF.

Chứng minh tương tự câu 5.1 ta có $ADE = ABC$, mà $xAD = ABC$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow ADE = xAD$ và ở vị trí so le trong $\Rightarrow Ax // DE$, mà $DE // BS, Ax \perp AO \Rightarrow DE \perp AO, BS \perp AO$.

Do $DE // BS \Rightarrow \dfrac{QF}{FL} = \dfrac{DF}{BF} = 1 \Rightarrow QF = LF$. Xét ΔQLS vuông ở S có $QF = LF \Rightarrow QF = LF = FS\,(1)$.

Xét ΔBTS và ΔATD có $BTS = ATD$ (hai góc đối đỉnh), $BST = ADI = 90^o \Rightarrow \Delta BTS \sim \Delta ATD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BT}{ST}=\dfrac{AT}{DT}(2)$, $TBS=TAD(3)$. Xét ΔBTA và ΔSTD có (2) và $ATB=DTS$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta BTA\sim\Delta STD$ (c.g.c) $\Rightarrow BAT=TDS(4)$. Tương tự ta có: $BSH=BAH(5)$.

Dễ dàng nhận thấy rằng $BAH=QAD(6)$, kết hợp (3) và (5) $\Rightarrow TBS=BSH$ và ở vị trí so le trong

$\Rightarrow BD//HS$.

Xét ΔBPD có $BD//HS \Rightarrow \dfrac{HN}{SN}=\dfrac{BF}{DF}=1$ (Áp dụng định lý Thales) $\Rightarrow HN=SN(7)$.

Từ (6), ta có: $BAH+HAT=HAT+QAD \Leftrightarrow BAT=HAD$, lại có $DBC=HAC$ (cùng phụ ACB) và (4)

$\Rightarrow DBC=TDS$. Từ đây dễ suy ra ΔBPD cân ở P, mà $BF=DF \Rightarrow PF\perp BD$.

Mà $BD//HS$ (chứng minh trên) $\Rightarrow PF\perp HS$. Kết hợp với (7) $\Rightarrow PF$ là đường trung trực của HS

$\Rightarrow HF=FS$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow QF=HF$ (đpcm).

Trở lại bài toán:

Áp dụng bổ đề trên vào ΔABC có E và F lần lượt là trung điểm của đường cao BN và đường cao CP

$\Rightarrow QE=ME; QF=MF \Rightarrow EF$ là đường trung trực của $QM \Rightarrow EF\perp QM$ (đpcm).

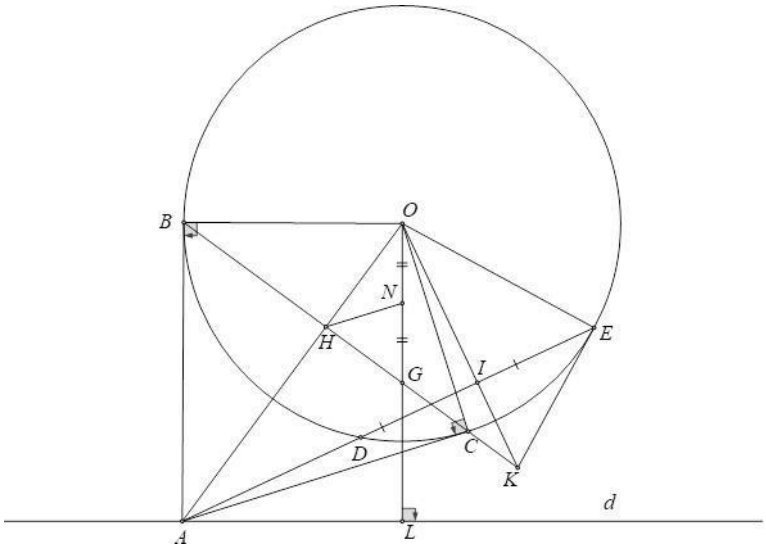
Bài 6. (3,0 điểm)

Cho đường thẳng (d) và đường tròn $(O;R)$ không giao nhau. Trên đường thẳng (d) lấy điểm A. Từ điểm A kẻ tiếp tuyến AB, AC Với $(O;R)$, (B,C là tiếp điểm) và cát tuyến ADE không di qua tâm O, (D nằm giữa A và E). Goi I là trung điểm cùa DE. Đường thẳng BC cắt OA và OI lần lượt tại H và K.

1. Chứng minh rằng KE là tiếp tuyến của $(O;R)$.

2. Chứng minh rằng khi A di động trên (d) thì H di động trên một đường tròn cố định.

Lời giải.



1. Xét (O) có I là trung điểm của dây cung $DE \Rightarrow OI\perp DE$ hay $OID=90^o$.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $AB=AC$, lại có $OB=OC=R\Rightarrow OA$ là đường trung trực của BC

$\Rightarrow OA\perp BC$

Xét ΔOHK và ΔOIA có $OID=OHK=90^o$; AOK chung

$\Rightarrow \Delta OHK\sim\Delta OIA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OH}{OK}=\dfrac{OI}{OA}\Rightarrow OI.OK=OH.OA(1)$

Xét ΔOAC vuông ở C có đường cao CH $\Rightarrow OH.OA=OC^2=R^2$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow OI.OK=R^2=OE^2\Rightarrow \dfrac{OI}{OE}=\dfrac{OE}{OK}(2)$.

Xét ΔOEK và ΔOIE có (2) và EOK chung

$\Rightarrow \Delta OEK\sim\Delta OIE$ (c.g.c) $\Rightarrow OEK=OIE=90^o$, từ đây suy ra điều phải chứng minh.

2. Kẻ $OL\perp(d)\left(L\in(d)\right)$, OL cắt BK ở G. Gọi N là trung điểm của OL.

Xét ΔOHG và ΔOLA có AOL chung; $OHG=OLA=90^o\Rightarrow\Delta OHG\sim\Delta OLA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{OH}{OG}=\dfrac{OL}{OA}\Rightarrow OH.OA=OG.OL$. Lại có $OH.OA=R^2\Rightarrow OG.OL=R^2(3)$.

Do R cố định và (d) cố định $\Rightarrow OL$ cố định. Kết hợp các điều trên với (3) $\Rightarrow OG$ cố định.

Xét ΔOHG vuông tại H có N là trung điểm của OG $\Rightarrow ON=GN=HN\Rightarrow H\in\left(N;\dfrac{OG}{2}\right)$.

Do OG cố định và N là trung điểm OG nên suy ra N cố định, từ đó ta có đpcm.

Bài 7. (2,0 điểm)

Cho a,b là các số nguyên, $a\neq -1,b\neq -1$ thỏa mãn: $\dfrac{(a-1)(a+1)^2+(b-1)(b+1)^2}{a+b+ab+1}$ là số nguyên.

Chứng minh: $a^{2023}b^{2024}-a$ chia hết cho a^2+a.

Lời giải

Điều cần chứng minh tương đương:

$\left(a^{2023}b^{2024}-a\right)\vdots(a+1)\Leftrightarrow\left(\left(a^{2022}b^{2024}-1\right)+(a+1)\right)\vdots(a+1)$

$\Leftrightarrow\left(a^{2022}b^{2024}+a\right)\vdots(a+1)\Leftrightarrow a\left(a^{2021}b^{2024}+1\right)\vdots(a+1)\Leftrightarrow\left(a^{2021}b^{2024}+1\right)\vdots(a+1)$ (do $(a,a+1)=1$).

Cứ làm tương tự như vậy, cuối cùng điều cần chứng minh tương đương $\left(b^{2024}-1\right)\vdots(a+1)$ (1).

Do $\dfrac{(a-1)(a+1)^2+(b-1)(b+1)^2}{a+b+ab+1}$ là số nguyên $\Rightarrow\left((a-1)(a+1)^2+(b-1)(b+1)^2\right)\vdots(a+b+ab+1)$

$\Leftrightarrow\left((a-1)(a+1)^2+(b-1)(b+1)^2\right)\vdots(a+1)(b+1)$ (2).

Gọi $(a+1,b+1)=d$ (ĐK: $d\geq 1$) $a+1=dq;b+1=dk$ (ĐK: $q;k\in N^*;(q;k)=1$)

$\Leftrightarrow a=dq-1;b=dk-1$.

Lúc này (2) trở thành $\left((dq-2)d^2q^2+(dk-2)d^2k^2\right)\vdots dq.dk\Leftrightarrow\left((dq-2)q^2+(dk-2)k^2\right)\vdots qk$.

Mà $qk \vdots q \Rightarrow \left((dq-2)q^2+(dk-2)k^2\right) \vdots q \Leftrightarrow (dk-2)k^2 \vdots q (3)$

Vì $(q,k)=1 \Rightarrow \left(q,k^2\right)=1$.

Kết hợp với (3) $(dk-2) \vdots q \quad (4)$.

Do $a=dq-1; b=dk-1$ nên điều (1) tương đương $\left((dk-1)^{2024}-1\right) \vdots dq \quad (5)$.

Ta lại có: $\left((dk-1)^{2024}-1\right)=\left((dk-1)^2\right)^{1012}-1 \vdots \left((dk-1)^2-1\right) \quad (6)$

Lại có: $(dk-1)^2-1=\left((dk-1)-1\right)\left((dk-1)+1\right)=\text{dk}(dk-2) \vdots \text{dkq}$ (Do có (4))

Mà $dkq \vdots dq \Rightarrow \left((dk-1)^2-1\right) \vdots dq$.

Kết hợp với (6) ta suy ra được điều (5) được chứng minh hay bài toán được chứng minh.

Vậy với a,b là các số nguyên, $a \neq -1, b \neq -1$ thỏa mãn: $\dfrac{(a-1)(a+1)^2+(b-1)(b+1)^2}{a+b+ab+1}$ là số nguyên thì $a^{2023}b^{2024}-a$ chia hết cho a^2+a