

Ngày thi: 16/9/2021

Hướng dẫn chấm gồm 04 trang

A) Hướng dẫn chung:

- 1) Học sinh làm đúng đến đâu thì chấm đến đó. Học sinh trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo chấm tương ứng biểu điểm của HDC.
- 2) Việc chi tiết hoá thang điểm phải đảm bảo không làm sai lệch biểu điểm của HDC và phải được thống nhất trong toàn hội đồng chấm thi.
- 3) Điểm của bài thi không làm tròn.

B) Hướng dẫn cụ thể:

Bài 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = a, -1 < a \neq 3 \\ x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 15}{2(x_n + 1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Nội dung	Điểm
Do $x_1 = a$ với $-1 < a \neq 3$ nên $0 < x_n \neq 3$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.	
Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + 1 + \frac{16}{x_n + 1} - 2 \right) \geq \frac{1}{2} (2 \cdot \sqrt{16} - 2) = 3.$ Suy ra $x_n > 3$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.	
Ta có $x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n + 1}{2} + \frac{16}{2(x_n + 1)}.$ Xét hàm số $f(x) = -\frac{x + 1}{2} + \frac{16}{2(x + 1)}$, $x > 3$, ta có $f'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{16}{2(x + 1)^2} < 0, \quad \forall x \in (3; +\infty).$ Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.	
Từ đó, với $n \geq 2$, ta được $f(x_n) < f(3) = 0$, kéo theo $(x_n)_{n \geq 2}$ là dãy giảm ngặt và bị chặn dưới bởi 3 nên nó có giới hạn hữu hạn là $L \geq 3$.	

Chuyển qua giới hạn, ta được	
$L = \frac{L^2 + 15}{2(L + 1)}.$	
Giải phương trình ta được $L = 3$.	

Bài 2 (5,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

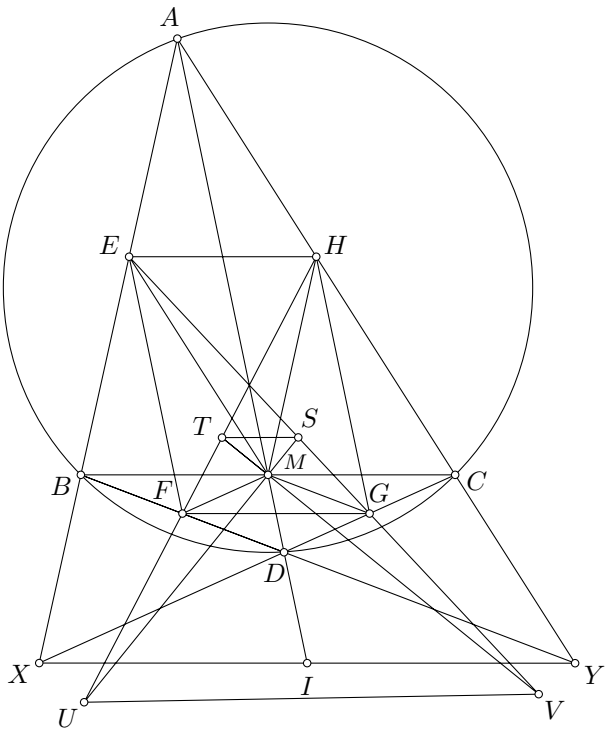
$$f(2x + f(y) + xf(y)) = x + y + xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Nội dung	Điểm
Ta chứng minh rằng f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử $f(y_1) = f(y_2)$, thay (x, y) lần lượt bởi $(1, y_1)$ và $(1, y_2)$, ta được	
$1 + 2y_1 = f(2 + 2f(y_1)) = f(2 + 2f(y_2)) = 1 + 2y_2$	
hay $y_1 = y_2$.	
Thay x bởi 0, ta được	
$f(f(y)) = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$	
Thay y bởi 0, ta được	
$f(2x + f(0) + xf(0)) = x = f(f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R},$	
mà f là đơn ánh nên	
$f(x) = 2x + f(0) + xf(0) = (2 + f(0))(1 + x) - 2.$	
Từ giả thiết, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, ta có	
$x + y + xy = f(2x + f(y) + xf(y)) = (2 + f(0))(1 + 2x + f(y) + xf(y)) - 2,$	
Thay x, y bởi 0 ta được	
$(2 + f(0))(1 + f(0)) = 2$	
hay $f(0) = 0$ hoặc $f(0) = -3$.	
Với $f(0) = 0$, ta được $f(x) = 2x$, thử lại hàm số này không thỏa mãn.	
Với $f(0) = -3$, ta được $f(x) = -x - 3$, thử lại hàm số thỏa mãn yêu cầu.	
Vậy bài toán có duy nhất một nghiệm hàm $f(x) = -x - 3$.	

Bài 3 (5,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và đường trung tuyến AM của tam giác ABC cắt (O) tại D (D khác A). Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BD, DC, CA . Gọi S, T lần lượt là chân đường phân giác trong góc M của các tam giác EMG và FMH . Các đường thẳng AB và DC cắt nhau tại X , AC và BD cắt nhau tại Y .

a) Chứng minh rằng $MS \perp MT$.

- b) Các đường thẳng MS và FH cắt nhau tại U , MT và EG cắt nhau tại V . Chứng minh rằng $UV \parallel XY$.

Ý	Nội dung	Điểm
		
3a	Do $MF \parallel DC$ và $MH \parallel AB$ nên $\widehat{BMF} = \widehat{BCD} = \widehat{BAM} = \widehat{AMH}.$	
	Lại có MT là phân giác góc $\widehat{FMH}$ nên MT là phân giác góc $\widehat{AMB}$.	
	Tương tự, MS là phân giác góc $\widehat{AMC}$, kéo theo $MT \perp MS$.	
3b	Theo a), MS, MT lần lượt là phân giác ngoài các góc $\widehat{FMH}$ và $\widehat{EMG}$.	
	Từ tính chất đường phân giác, ta có $\frac{VE}{VG} = \frac{ME}{MG}, \quad \frac{UH}{UF} = \frac{MH}{MF}.$	
	Do các cặp tam giác AMB và CMD , AMC và BMD đồng dạng nên $\frac{ME}{MG} = \frac{MA}{MC} = \frac{MA}{MB} = \frac{MH}{MF}.$	
	Kéo theo $\frac{VE}{VG} = \frac{UH}{UF}$.	
	Mà $EH \parallel FG$ nên theo định lí Thales ta được $UV \parallel EH \parallel FG \parallel BC$.	
	Gọi I là giao điểm của AD và XY , rõ ràng $X(AD, MI) = -1$	
	Kết hợp M là trung điểm BC , ta được $XY \parallel BC$. Vậy $XY \parallel UV$.	

Bài 4 (5,0 điểm).

- a) Cho số nguyên dương d , tìm số cặp (x, y) nguyên dương sao cho $\frac{xy}{x-y} = d$.

- b) Với mỗi số nguyên dương $n > 1$, gọi $f(n)$ là số cặp (x, y) nguyên dương sao cho $\frac{xy}{x-y}$ là ước nguyên dương của n . Tìm tất cả các giá trị của n để $f(n) = 231$.

Ý	Nội dung	Điểm
4a	Với số nguyên dương d , ta có $\frac{xy}{x-y} = d$ thì $(x+d)(y-d) = -d^2$. Khi đó, tồn tại ước nguyên dương r của d^2 sao cho $r = x+d$,	
	thì $x = r-d$ và $y = d - \frac{d^2}{r}$. Do $x > y > 0$ nên $r > d$.	
	Ngược lại, với mỗi ước nguyên dương $r > d$ của d^2 , thử trực tiếp, ta được cặp $(x, y) = \left(r-d, d - \frac{d^2}{r}\right)$ thoả mãn $\frac{xy}{x-y} = d$.	
	Như vậy số cặp (x, y) nguyên dương thoả $\frac{xy}{x-y} = d$ chính là $\frac{\tau(d^2) - 1}{2}$.	
4b	Rõ ràng $f(n) = \sum_{d n} \frac{\tau(d^2) - 1}{2} = \left(\frac{1}{2} \sum_{d n} \tau(d^2) \right) - \frac{\tau(n)}{2}.$	
	Dễ thấy $\tau(m^2)$ là một hàm nhân tính. Giả sử n có phân tích tiêu chuẩn là $n = \prod_{i=1}^s p_i^{a_i}$, sử dụng công thức tổng trải, ta được $\begin{aligned} \sum_{d n} \tau(d^2) &= \prod_{i=1}^s (1 + \tau(p_i^2) + \tau(p_i^4) + \cdots + \tau(p_i^{2a_i})) \\ &= \prod_{i=1}^s (1 + 3 + 5 + \cdots + (2a_i + 1)) \\ &= \prod_{i=1}^s (1 + a_i)^2 = (\tau(n))^2. \end{aligned}$	
	Kéo theo $f(n) = \frac{(\tau(n))^2 - \tau(n)}{2} = \frac{\tau(n)(\tau(n) - 1)}{2}$.	
	Do đó $f(n) = 231$ khi $\tau(n)(\tau(n) - 1) = 22 \cdot 21$.	
	Suy ra $\prod_{i=1}^s (1 + a_i) = \tau(n) = 22 = 2 \cdot 11$.	
	Do đó hoặc n có đúng một ước nguyên tố p và $n = p^{21}$ hoặc n có đúng hai ước nguyên tố phân biệt p, q và $n = pq^{10}$.	

—————HẾT—————