

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẮK LẮK**

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề này có 01 trang, gồm 04 câu)

**KỶ THI LẬP CÁC ĐỘI TUYỂN DỰ THI
HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2021-2022
MÔN: TOÁN**

Ngày thi: 24/11/2021 (Buổi thi thứ nhất)
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (5,0 điểm).

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x + y + z.$$

Câu 2: (5,0 điểm).

Xét ba đa thức có hệ số nguyên, khác đa thức hằng $P(x), Q(x), T(x)$ thỏa mãn $T(x) = P^2(x) + Q^2(x)$ với mọi x . Giả sử $T(0) = 24$, chứng minh rằng đa thức $T(x) + 11x + 2021x^2$ không thể biểu diễn thành tổng bình phương của hai đa thức hệ số nguyên.

Câu 3: (5,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy ba điểm D, E, F thỏa mãn $\frac{BD}{DC} = 1, \frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}, \frac{AF}{FB} = \frac{1}{3}$. Gọi M, N, P theo thứ tự là giao điểm của các đoạn thẳng AD và BE , BE và CF , CF và AD . Giả sử diện tích tam giác ABC bằng 1. Hãy tính diện tích của tam giác MNP .

Câu 4: (5,0 điểm).

Cho số nguyên n ($n \geq 2$) và tập $S = \{n^3; n^3 + 1; n^3 + 2; \dots; n^3 + n\}$. Gọi A, B là các tập con khác rỗng của tập S sao cho $A \cap B = \emptyset$ và tổng các phần tử của tập B chia hết cho tổng các phần tử của tập A . Chứng minh rằng: $|B|$ chia hết cho $|A|$ (kí hiệu $|X|$ là số phần tử của tập X).

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên:.....Số báo danh:.....

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẮK LẮK**

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề này có 01 trang, gồm 04 câu)

**KỲ THI LẬP CÁC ĐỘI TUYỂN DỰ THI
HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2021-2022
MÔN: TOÁN**

Ngày thi: 24/11/2021 (Buổi thi thứ hai)
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (5,0 điểm).

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:
$$\begin{cases} u_0 = 2021, u_1 = 2022; \\ u_{n+2} = (u_{n+1}u_n^2)^{\frac{1}{3}}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát u_n .

Câu 2: (5,0 điểm).

Kí hiệu $\mathbb{N}^*$ là tập các số nguyên dương. Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

- i) $f(n) = n - 256$ nếu $n > 2021, n \in \mathbb{N}^*$;
- ii) $f(n) = f(f(n + 512))$ nếu $1 \leq n \leq 2021, n \in \mathbb{N}^*$.

Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình $f(n) = n$.

Câu 3: (5,0 điểm).

Cho A là tập hợp các số nguyên dương chứa ít nhất 2 phần tử. Biết với hai số tùy ý $a, b \in A, a > b$ ta có $\frac{BCNN(a, b)}{a - b} \in A$. Chứng minh rằng tập hợp A có đúng 2 phần tử.

Câu 4: (5,0 điểm).

Cho tứ giác $ABCD$ có AB và CD không song song. Đường tròn tâm O_1 đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với cạnh CD tại P . Đường tròn tâm O_2 đi qua hai điểm C, D và tiếp xúc với cạnh AB tại Q . Hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại E và F . Chứng minh EF đi qua trung điểm của PQ khi và chỉ khi $BC \parallel AD$.

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên:.....Số báo danh:.....