

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH TUYÊN QUANG

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN

NĂM HỌC 2022-2023

Môn : TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài : 150 phút

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 12$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{2b+c+a} + \frac{1}{2c+a+b} \leq 3$$

Câu 2. (3,0 điểm)

1) Cho phương trình $\sqrt{2x^2 - 3x + m} = x (*)$

a) Giải phương trình (*) khi $m = 2$

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2(x + \sqrt{y}) - (4\sqrt{x} + \sqrt{xy}) = 0 \\ x^2 + xy - 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AP. Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H ($E \in AC, F \in AB$). Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AH và EF. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BE tại T. Chứng minh rằng :

a) $\angle AEF = \angle ABC$

b) Hai đường thẳng IK, AT vuông góc

c) Các đường thẳng BC, HP, IK đồng quy

Câu 4. (1,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $3xy + x - 6y = 4$

b) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a + 2b = 2^{2023}$. Chứng minh rằng $P = a^7 + 2b^7 + 1$ không thể là một số chính phương.

Câu 5. (1,0 điểm)

Đầu tiên, thầy giáo viết lên bảng 23 số tự nhiên liên tiếp $1, 2, 3, \dots, 22, 23$ thành một hàng ngang. Thầy cho mỗi học sinh thực hiện trò chơi **đổi số** như sau: Mỗi lần **đổi số**, người chơi xóa hai số a, b bất kỳ và thay bằng số mới là $|a - b|$. Sau 22 lần **đổi số** như trên, bạn Phong thu được một số nguyên tố p

a) Xác định p

b) Em hãy chỉ ra một quy trình biến đổi 23 số trên để được số p

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

c) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$

$$A = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}+2)^2} = \sqrt{5}-2 - \sqrt{5}-2 = -4$$

d) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 12$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{2b+c+a} + \frac{1}{2c+a+b} \leq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y > 0$

Ta có :

$$\frac{1}{2a+b+c} = \frac{1}{a+b+a+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) \right] = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (1)$$

Chứng minh tương tự :

$$\frac{1}{2b+a+c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \right) (2); \quad \frac{1}{2c+a+b} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} \right) (3)$$

Cộng (1), (2), (3) theo vế ta được :

$$P \leq \frac{1}{16} \left(\frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3 (đpcm). \text{ Dấu bằng xảy ra khi } a = b = c = \frac{1}{4}$$

Câu 2. (3,0 điểm)

3) Cho phương trình $\sqrt{2x^2 - 3x + m} = x (*)$

c) Giải phương trình (*) khi $m = 2$

Thay $m = 2$ vào (*) ta được phương trình $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = x$

$$\text{Ta có } \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + 2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy khi $m = 2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1; x = 2$

d) Tìm các giá trị của m để phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt

$$\text{Ta có } \sqrt{2x^2 - 3x + m} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + m = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 3x + m = 0 \end{cases} (1)$$

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt không âm. Khi đó, ta có :

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ 3 > 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < \frac{9}{4}$$

Vậy khi $0 \leq m < \frac{9}{4}$ thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\mathbf{4) Giải hệ phương trình:} \begin{cases} 2(x + \sqrt{y}) - (4\sqrt{x} + \sqrt{xy}) = 0 & (1) \\ x^2 + xy - 2y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện : $x \geq 0; y \geq 0$. Biến đổi phương trình (1) ta có :

$$2(x + \sqrt{y}) - (4\sqrt{x} + \sqrt{xy}) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{y} - 4\sqrt{x} - \sqrt{xy} = 0$$

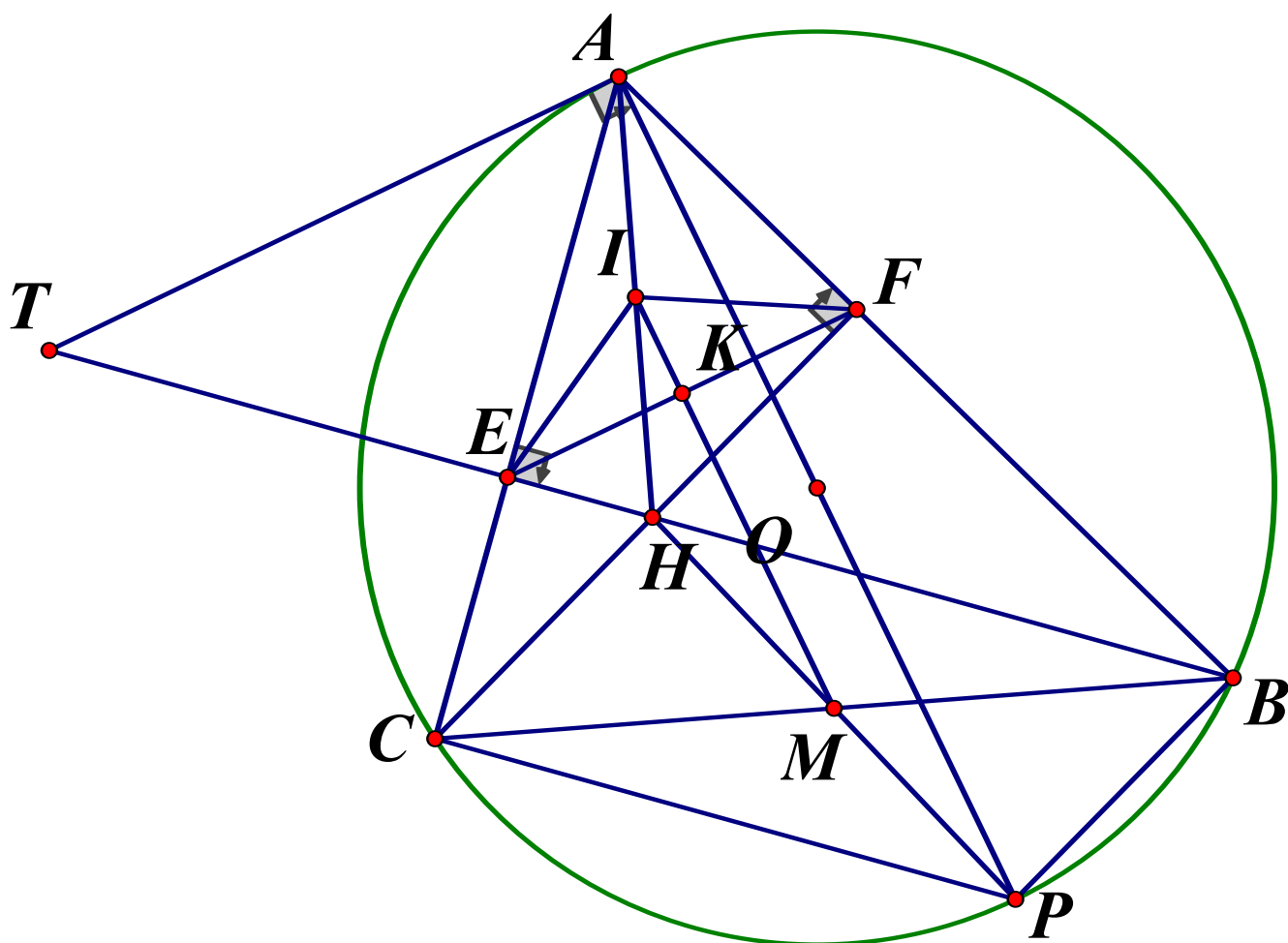
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) - \sqrt{y}(\sqrt{x} - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 2 = 0 \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4x \end{cases}$$

$$x = 4 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow 16 + 4y - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -9,5(ktm)$$

$$y = 4x, (2) \Leftrightarrow x^2 + 4x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 4(tm) \\ x = \frac{3}{5} \Rightarrow y = \frac{12}{5}(tm) \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y) \in \left\{ (1; 4), \left(\frac{3}{5}; \frac{12}{5} \right) \right\}$

Câu 3. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , đường kính AP . Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H ($E \in AC, F \in AB$). Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AH và EF . Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BE tại T . Chứng minh rằng :



d) $\angle AEF = \angle ABC$

Xét tứ giác $BCEF$ ta có :

$\angle CEB = \angle CFB = 90^\circ$ suy ra 4 điểm C, B, E, F nằm trên cùng một đường tròn

$\Rightarrow BCEF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle FBC + \angle CEF = 180^\circ$ mà $\angle CEF + \angle AEF = 180^\circ$ do đó :

$\angle FBC = \angle AEF$ hay $\angle ABC = \angle AEF$

e) Hai đường thẳng IK, AT vuông góc

Xét $\triangle AEH$ ($\angle E = 90^\circ$) có I là trung điểm của AH suy ra $IA = IH = IC$ (1)

Xét $\triangle AFH$ ($\angle F = 90^\circ$) có I là trung điểm của AH nên $IA = IH = IF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IE = IF \Rightarrow \triangle IEF$ cân tại I mà $EK = FK$ do đó KI là đường cao của $\triangle IEF$
Hay $IK \perp EF$ (3)

Ta có $\angle ABC = \angle AEF$ (cmt) , mặt khác $\angle ABC = \angle TAE \left(= \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{AC} \right) \Rightarrow AT \parallel EF$ (so le trong) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $IK \perp AT$

f) Các đường thẳng BC, HP, IK đồng quy

Ta có $\angle ABP = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra $BP \perp AB$ mà $CH \perp AB$ do đó $BP \parallel CH$ (5)

Cmtt ta cũng có $CP \parallel BH$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra tứ giác $BPCH$ là hình bình hành

Do đó BC cắt HP tại trung điểm mỗi đường (7)

Gọi $IK \cap HP = M$, ta có $IK \perp AT$ (cmt) $\Rightarrow IK \parallel AP$ hay $IM \parallel AP$

Mà I là trung điểm của AH nên M là trung điểm của HP (8)

Từ (7) và (8) suy ra BC, HP, IK đồng quy tại trung điểm M của BC

Câu 4. (1,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3xy + x - 6y = 4$

Ta có $3xy + x - 6y = 4 \Leftrightarrow (x-2)(3y+1) = 2$ (1)

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x-2 \in \mathbb{Z}, 3y+1 \in \mathbb{Z}$ mà $3y+1$ chia 3 dư 1 nên :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-2=2 \\ 3y+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} (tm) \\ \begin{cases} x-2=-1 \\ 3y+1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} (tm) \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn là $(4; 0), (1; -1)$

b) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a + 2b = 2^{2023}$. Chứng minh rằng

$P = a^7 + 2b^7 + 1$ không thể là một số chính phương.

Ta có: $P - 2^{2023} = (a^7 - a) + 2(b^7 - b) + 1 = 7t + 1$. Vì $(a^7 - a) \vdots 7, (b^7 - b) \vdots 7$

$$\text{Mà } 2^{2023} = 2 \cdot (2^3)^{674} = 2 \cdot 8^{674} \equiv 2 \pmod{7}$$

Do đó $P \equiv 3 \pmod{7}$ suy ra P không là số chính phương

Câu 5. (1,0 điểm)

Đầu tiên, thầy giáo viết lên bảng 23 số tự nhiên liên tiếp $1, 2, 3, \dots, 22, 23$ thành một hàng ngang. Thầy cho mỗi học sinh thực hiện trò chơi đổi số như sau: Mỗi lần đổi số, người chơi xóa hai số a, b bất kỳ và thay bằng số mới là $|a - b|$. Sau 22 lần đổi số như trên, bạn Phong thu được một số nguyên tố p

c) Xác định p

d) Em hãy chỉ ra một quy trình biến đổi 23 số trên để được số p

a) Xét tổng $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 23 = 256$

Vì sau mỗi lần xóa hai số a, b bất kỳ và thay bằng số $|a-b|$ nên mỗi bước tổng A sẽ thay đổi là $B = A - (a+b) + |a-b|$

+) Nếu $a \geq b$ thì $B = A - (a+b) + |a-b| = A - a - b + a - b = A - 2b$

+) Nếu $a < b$ thì $B = A - (a+b) + |a-b| = A - a - b - (a-b) = A - 2a$

Nhận xét sau mỗi lần đổi số thì B luôn là số chẵn (do $A=256$, $2a$, $2b$ cũng là số chẵn). Do đó sau 22 lần đổi số bạn Phong thu được một số nguyên tố p thì $p = 2$.

Vậy $p = 2$

b)

+Từ lần đổi số 1 đến lần đổi số 8 ta xóa lần lượt các cặp số $(23;22), (21;20), \dots, (9;8)$. Ta thu được 8 số 1

+Từ lần đổi số thứ 9 đến lần đổi số thứ 15 ta thực hiện với 8 số 1 đã thu được sau 8 lần đổi đầu, ta nhận được 1 số 0

+Với các lần đổi số thứ 16 ta thực hiện với cặp $(0;1)$ ta thu được số 1

+Với lần đổi thứ 17;18;19 ta thực hiện lần lượt với các cặp số $(6;3), (7;5), (4;2)$ ta thu được các số 3,2,2

+Với lần đổi số thứ 20,21 ta thực hiện với các cặp $(3;1), (2;2)$ ta thu được hai số là 2 và 0

+Với lần đổi số thứ 22 ta thực hiện với cặp số $(2;0)$ ta thu được số nguyên tố cuối cùng là 2. Vậy số nguyên tố còn lại sau 22 lần đổi là 2