

Câu 1: (5.0 điểm). Cho dãy số u_n xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = a > 0 \\ u_{n+1} = \frac{nu_n^2 + 1}{(n+1)u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $u_n \geq 1, \forall n \geq 2$.

b) Chứng minh rằng, dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 2: (5.0 điểm). Cho số nguyên dương n và dãy các số $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ nhận giá trị thuộc tập $\{-1; 1\}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$\begin{cases} S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} > 0, \\ S_i = a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+9} \neq 0, \forall i = \overline{1, 2n} \end{cases}$$

trong đó ta quy ước $a_{2n+k} = a_k, \forall k = \overline{1; 9}$.

a) Chứng minh rằng $S_i \geq 2, \forall i = \overline{1, 2n}$.

b) Khi $n = 2023$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của S .

Câu 3: (5.0 điểm). Xét một xâu ký tự gồm n chữ cái với các chữ cái thuộc tập $\{a; b; c; d\}$. Xâu ký tự được gọi là **xâu xoắn** nếu nó có hai khối liên tiếp các chữ cái là giống nhau. Chẳng hạn, các xâu ký tự $caab$ và $cababdc$ là **xâu xoắn**, nhưng $abcbab$ thì không phải là **xâu xoắn**. Chứng minh rằng số các xâu ký tự gồm n chữ cái **không phải là xâu xoắn** lớn hơn 2^n .

Câu 4: (5.0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có B, C cố định và A thay đổi trên (O) . Gọi D là trung điểm BC và BE, CF là các đường cao của tam giác ABC . Hai đường tròn (DBF) và (DCE) cắt nhau tại điểm thứ hai là K .

a) Chứng minh rằng K luôn thuộc đường tròn cố định.

b) Lấy T trên (O) sao cho $KT \perp BC$ và A, T khác phía với BC . Các đường thẳng AB, BT cắt đường tròn (AKT) tại điểm thứ hai lần lượt là M, N . Gọi I là trung điểm MN . Chứng minh rằng D thuộc đường tròn (ATI) .

YÊU CẦU CHUNG

* Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận lô gic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.

* Trong mỗi bài, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu hình, nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.

* Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,5 điểm. Đối với điểm thành phần lớn hơn 0,5 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,5 điểm.

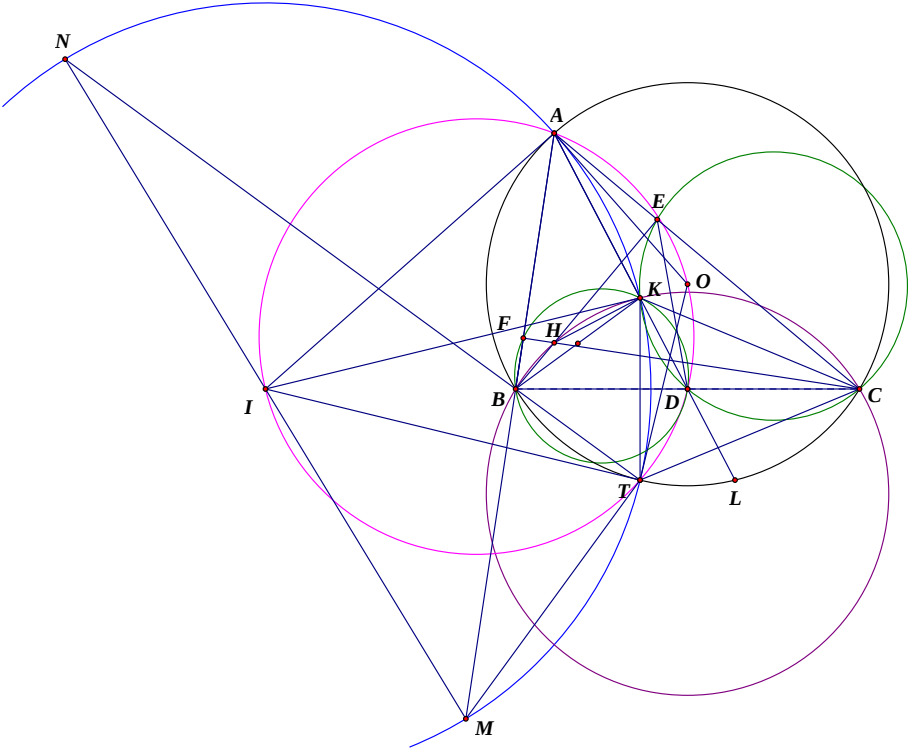
* Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng bài.

* Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1a: (2.0 điểm)	Ta sẽ chứng minh $u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy, ta có $u_1^2 + 1 \geq 2u_1 > 0 \Rightarrow u_2 = \frac{u_1^2 + 1}{2u_1} \geq 1$. Giả sử $u_n \geq 1, n \geq 2$, ta phải chứng minh $u_{n+1} \geq 1$. (1)	0.5
	Ta có $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó, với mọi $n \geq 2$, ta có $u_{n+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{nu_n^2 + 1}{(n+1)u_n} \geq 1 \Leftrightarrow nu_n^2 + 1 \geq (n+1)u_n \Leftrightarrow (nu_n - 1)(u_n - 1) \geq 0$. (2)	1.0
	Vì $u_n \geq 1, n \geq 2$, nên (2) đúng, suy ra (1) đúng. Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có $u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.	0,5
Câu 1b: (3.0 điểm)	Với mọi $n \geq 2$, ta có $u_n \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{u_n} \leq 1$. Và $u_{n+1} = \frac{nu_n^2 + 1}{(n+1)u_n} \Leftrightarrow (n+1)u_{n+1} = nu_n + \frac{1}{u_n}$	0,5
	Do đó với mọi $n \geq 2$ ta có $nu_n = (n-1)u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}} = (n-2)u_{n-2} + \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_{n-2}} = \dots = u_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{u_i}.$	1,0

	Nên $nu_n = u_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{u_i} \leq u_1 + n - 1 \Rightarrow 1 \leq u_n \leq \frac{u_1 + n - 1}{n}$.	1,0
	Vì $\lim \frac{u_1 + n - 1}{n} = \lim \left(\frac{u_1 - 1}{n} + 1 \right) = 1$ nên theo nguyên lý kẹp, dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim u_n = 1$. Lưu ý: Nếu học sinh chứng minh được dãy số có giới hạn hữu hạn bằng cách khác mà chưa tìm được giới hạn dãy số thì cho 1,5 điểm.	0,5
Câu 2a: (2.5 điểm)	a) Với mọi $i = \overline{1, 2n}$, ta có S_i là tổng của 10 số lẻ nên S_i chẵn. Và $ S_{i+1} - S_i = a_{i+10} - a_i \leq 2 \Rightarrow S_i - 2 \leq S_{i+1} \leq S_i + 2, \forall i = \overline{1, 2n-1}$.	0,5
	Vì S_i và S_{i+1} chẵn nên $\begin{cases} S_{i+1} = S_i \\ S_{i+1} = S_i + 2 \\ S_{i+1} = S_i - 2 \end{cases}$	0,5
	Ta sẽ chứng minh $S_i S_{i+1} > 0, \forall i = \overline{1, 2n-1}$. Vì $S_i \neq 0, \forall i = \overline{1, 2n}$ nên + Nếu $S_{i+1} = S_i \Rightarrow S_{i+1} S_i = S_i^2 > 0$ + Nếu $S_i \neq S_{i+1}$, giả sử $S_{i+1} S_i < 0$, ta có $\begin{cases} S_{i+1} = S_i + 2 \\ S_{i+1} = S_i - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{i+1} > 0 > S_i \\ S_{i+1} < 0 < S_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{i+1} \geq 2 \\ S_i \leq -2 \\ S_i \geq 2 \\ S_{i+1} \leq -2 \end{cases} \Rightarrow S_{i+1} - S_i \geq 4. \text{ Mâu thuẫn.}$ Vậy $S_i S_{i+1} > 0, \forall i = \overline{1, 2n-1}$.	1,0
	Suy ra các số hạng của dãy $(S_i), i = \overline{1, 2n}$ giữ nguyên một dấu. Vì $0 < 10S = S_1 + S_2 + \dots + S_{2n} \Rightarrow S_i > 0, \forall i = \overline{1, 2n}$. Vì S_i chẵn nên $S_i \geq 2, \forall i = \overline{1, 2n}$.	0,5
	b) Ta có $10S = S_1 + S_2 + \dots + S_{2n} \geq 2n \cdot 2 = 4n \Rightarrow S \geq \frac{2n}{2}$. Với $n = 2023$: Ta có $S \geq 809,2$. Vì S chẵn nên $S \geq 810$.	1,0
Câu 2b: (2.5 điểm)	Ta chỉ ra một cách chọn dãy $a_1, a_2, \dots, a_{4046}$ thỏa mãn bài toán sao cho $S = 810$ như sau $\underbrace{1; 1; 1; -1; -1; 1; 1; 1; -1; -1}_{\text{bộ 10 số}} \dots \underbrace{1; 1; 1; -1; -1; 1; 1; 1; -1; -1}_{\text{bộ 10 số}}; 1; 1; 1; -1; -1; 1; 1; 1; -1; -1; 1.$ 404 bộ	1,0
	Vậy $\min S = 810$.	0,5

	Lưu ý: Nếu học sinh không giải được ý a) mà sử dụng kết quả ý a) để giải ý b) thì vẫn cho điểm tối đa cho ý b).	
Câu 3: (5.0 điểm)	Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp toán học theo n . Với $n \leq 3$ ta kiểm tra trực tiếp các trường hợp đều đúng. Giả sử với $n \geq 4$ thì bài toán đúng với mọi số nguyên dương nhỏ hơn n . Khi đó, gọi a_n là số các xâu xoắn và b_n là số các xâu ký tự không phải là xâu xoắn . Ta tìm cách thiết lập các hệ thức truy hồi cho a_n .	1,0
	Ta có $a_n + b_n = 4^n, \forall n \geq 4$. (1)	1,0
	Xét một xâu xoắn gồm n chữ cái. Từ xâu này ta xóa đi chữ cái cuối cùng của xâu ta được một xâu ký tự gồm $n-1$ chữ cái. - Nếu xâu ký tự nhận được theo cách này là xâu xoắn thì xâu xoắn trong trường hợp này có $n-1$ ký tự và là một xâu trong số a_{n-1} . - Nếu ngược lại, khi đó hai khối các chữ cái liên tiếp giống nhau phải nằm ở vị trí cuối của xâu ký tự nên có dạng AXX . Hơn nữa, AX là xâu ký tự không phải là xâu xoắn . Ta có thể nhận được một xâu xoắn theo cách sau : Chọn một xâu ký tự không phải là xâu xoắn T có độ dài l không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$ và viết thêm vào sau nó một dãy gồm $n-l$ các chữ cái cuối của xâu này. Chú ý rằng một số xâu xoắn trong trường hợp này có thể được đếm hai lần, chẳng hạn $abacabcabc$, nhưng mọi xâu ký tự đều đã được xét.	1,0
	Ta có $a_n \leq 4a_{n-1} + \left(b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} + \dots + b_{n-1} \right)$. Suy ra $b_n \geq 4b_{n-1} - \left(b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} + \dots + b_{n-1} \right)$.	1,0
	Ta chứng minh $b_n \geq 2b_{n-1}$ bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy, ta có $b_1 = 4$ và $b_2 = 12$ nên $b_2 > 2b_1$. Giả sử khẳng định đúng với mọi số nguyên dương nhỏ hơn n , khi đó $b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} + \dots + b_{n-1} \leq b_{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) \leq 2b_{n-1},$ Do đó $b_n \geq 4b_{n-1} - 2b_{n-1} = 2b_{n-1}$. Do vậy $b_n > 2^n$. Vậy bài toán được giải quyết.	1,0

Câu 4a: (2.0 điểm)		
	a) Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$. Khi đó $BHC = EHF = 180^\circ - BAC$ (vì $AEHF$ nội tiếp) (1) Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC nên $DB = DF = DC = DE$. Suy ra $BFD = FBD = ABC$, $CED = ECD = ACB$. Do đó ta có $BKC = BKD + CKD = BFD + CED = ABC + ACB = 180^\circ - BAC$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $BHC = BKC$. Vậy K thuộc đường tròn (BHC). Hơn nữa (BHC) đối xứng với (O) qua BC nên (BHC) cố định.	0,5 0,5 0,5 0,5
Câu 4b: (3.0 điểm)	b) Ta có $AE.AC = AF.AB$ (do $BCEF$ nội tiếp) hay $P_{A/(DBF)} = P_{A/(DCE)}$, suy ra $A \in KD$. Gọi L đối xứng với K qua D thì $BKCL$ là hình bình hành nên $BLC = BKC = 180^\circ - BAC$. Do đó $L \in (O)$. Vì $KT \perp BC$, $K \in (BHC)$, $T \in (O)$ nên K và T đối xứng nhau qua BC. $\triangle KTL$ có đường trung tuyến $TD = KD = \frac{1}{2}KL$ nên $KT \perp TL$, dẫn đến $TL \parallel BC$ hay AT là đường đối trung của $\triangle ABC$. Gọi tiếp tuyến tại A và T của (O) cắt nhau tại I' thì $I' \in BC$, khi đó $I'A = I'T = I'K$ nên I' là tâm (AKT). Lại có $MBT + BMT = ACT + \frac{1}{2}AI'T = ACT + \frac{1}{2}(180^\circ - AOT) = ACT + 90^\circ - \frac{AOT}{2} = 90^\circ.$ Do đó $TB \perp TM$, suy ra tâm (AKT) là trung điểm MN, hay $I' \equiv I$. Hơn nữa (ATI) có đường kính là OI, mà $ODI = 90^\circ$ nên (ATI) đi qua D.	1,0 1,0 1,0

----- Hết -----