

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ**

**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 - NĂM HỌC 2023-2024
TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUỐC HỌC - HUẾ**

Môn thi: TOÁN (CHUYÊN TOÁN)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (1,5 điểm)

a) Chứng minh giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{2 + \sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1} \right) : \frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + a - \sqrt{a} - 1}$ không phụ thuộc vào giá trị của a , với $a > 0$ và $a \neq 1$.

b) Cho a, b, c là ba số nguyên dương thỏa mãn $\frac{4}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{c}$. Chứng minh $Q = a^2 + 4b^2 + 16c^2$ là một số chính phương.

Câu 2 (1,5 điểm)

a) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng (d): $y = \frac{1}{2}x + m$. Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại A.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x - 2y - 3} + 2y^2 + 4y = 0 \\ x^2 + 1 = xy \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm)

a) Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m - 1)x - m^2 + 2m - 3 = 0$ (x là ẩn số) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1^2 + 1} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 1} + x_2$.

b) Giải phương trình $2(\sqrt{x + 9} - 3)(\sqrt{9 - x} + 3) = 9$.

Câu 4 (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AD và trực tâm H. Gọi E là điểm trên (O) sao cho hai dây AE và BC song song với nhau. Đường thẳng EH cắt (O) tại điểm thứ hai là F và cắt đường trung trực của BC tại M.

a) Chứng minh M là trung điểm của EH và AMOF là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{OFA} + \widehat{ODF} = 180^\circ$.

c) Gọi K là điểm đối xứng với A qua O. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng FK tại T. Chứng minh hai đường thẳng TH và BC song song với nhau.

Câu 5 (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số thực a sao cho $a + \sqrt{2023}$ và $\frac{999}{a} + \sqrt{2023}$ đều là các số nguyên.

b) Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $4a^2 + b^2 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{4a}{2 + b} + \frac{b}{1 + a} + \frac{2024}{2a + b}.$$

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾKỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 - NĂM HỌC 2023-2024
TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUỐC HỌC-HUẾ
Môn thi: TOÁN (CHUYÊN TOÁN)HƯỚNG DẪN CHẤM – ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM
ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Nội dung có 05 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
1 (1,5 điểm)	a) Chứng minh giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{2 + \sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1} \right) : \frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + a - \sqrt{a} - 1}$ không phụ thuộc vào giá trị của a, với $a > 0$ và $a \neq 1$.	0,75
	Với $a > 0, a \neq 1$ ta có: $P = \left[\frac{2 + \sqrt{a}}{(\sqrt{a} + 1)^2} - \frac{\sqrt{a} - 2}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} \right] : \frac{\sqrt{a}}{(a - 1)(\sqrt{a} + 1)}$	0,25
	$= \left[\frac{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1) - (\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)^2} \right] \cdot \frac{(a - 1)(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a}}$	0,25
	$= \left[\frac{2\sqrt{a}}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)^2} \right] \cdot \frac{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)^2}{\sqrt{a}} = 2.$	0,25
	Vậy giá trị của P không phụ thuộc vào giá trị của a.	
	b) Cho a, b, c là ba số nguyên dương thỏa mãn $\frac{4}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{c}$. Chứng minh $Q = a^2 + 4b^2 + 16c^2$ là một số chính phương.	0,75
2 (1,5 điểm)	Ta có $\frac{4}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow ab = 2ac + 4bc \Leftrightarrow ab - 2ac - 4bc = 0.$	0,25
	Khi đó $Q = a^2 + 4b^2 + 16c^2 = a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 4(ab - 2ac - 4bc)$	0,25
	$= (a + 2b - 4c)^2$ là một số chính phương.	0,25
	a) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng (d): $y = \frac{1}{2}x + m$. Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại A.	0,75
	Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):	0,25

	$2x^2 = \frac{1}{2}x + m \Leftrightarrow 4x^2 - x - 2m = 0 \quad (1).$ (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 1 + 32m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{32}.$	
	Vì tam giác OAB vuông tại A nên $OA \perp AB$, hay $OA \perp (d)$. Mặt khác, đường thẳng OA đi qua O nên OA có phương trình là $y = -2x$. Phương trình hoành độ giao điểm của OA và (P): $2x^2 = -2x$. Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0; x_2 = -1$, suy ra $A(-1; 2)$.	0,25
	Vì (d) đi qua A nên $2 = \frac{1}{2} \cdot (-1) + m$, suy ra $m = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn). Vậy $m = \frac{5}{2}$ là giá trị cần tìm.	0,25
	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-2y-3} + 2y^2 + 4y = 0 & (1) \\ x^2 + 1 = xy & (2) \end{cases}$	0,75
	Dễ thấy $x = 0$ không thỏa (2) nên $(2) \Leftrightarrow y = x + \frac{1}{x}$. Thay vào (1), ta được $\sqrt{-x - \frac{2}{x} - 3} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \sqrt{-x - \frac{2}{x} - 3} + 2(x^2 + 2x + 1) + 2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1\right) = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{-x - \frac{2}{x} - 3} + 2(x+1)^2 + 2\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow -x - \frac{2}{x} - 3 = x + 1 = \frac{1}{x} + 1 = 0$ $\Leftrightarrow x = -1.$ Với $x = -1$, ta suy ra $y = -2$. Vậy hệ pt đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (-1; -2)$.	0,25
3 (2,0 điểm)	a) Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x - m^2 + 2m - 3 = 0$ (x là ẩn số) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1^2 + 1} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 1} + x_2$.	1,00
	Ta có $\Delta = -(m-1)^2 - 2 < 0$, với mọi m. Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.	0,25
	Ta có $\sqrt{x_1^2 + 1} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 1} + x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1} = x_1 + x_2$ $\Leftrightarrow \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} = x_1 + x_2 \Leftrightarrow \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} = x_1 + x_2$	0,25

4 (3,0 điểm)	$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ \sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1} = x_1 - x_2 \end{cases}$	
	TH1: $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 2(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$.	0,25
	TH2: $\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1} = x_1 - x_2 \Leftrightarrow (\sqrt{x_1^2 + 1} - x_1) + (\sqrt{x_2^2 + 1} + x_2) = 0$ (vô lý). Vậy $m = 1$.	0,25
	b) Giải phương trình $2(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{9-x}+3) = 9$.	1,00
	Điều kiện: $-9 \leq x \leq 9$.	
	Ta có $(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{9-x}+3) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \sqrt{81-x^2} + 3(\sqrt{x+9}-\sqrt{9-x}) - \frac{27}{2} = 0$.	0,25
	Đặt $t = \sqrt{x+9} - \sqrt{9-x}$, suy ra $t^2 = 18 - 2\sqrt{81-x^2}$, ta có phương trình $\frac{18-t^2}{2} + 3t - \frac{27}{2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{t^2}{2} + 3t - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(t-3)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 3$.	0,25
	Với $t = 3$, ta có $\sqrt{x+9} - \sqrt{9-x} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+9} = 3 + \sqrt{9-x}$ $\Leftrightarrow x+9 = 18 - x + 6\sqrt{9-x} \Leftrightarrow 6\sqrt{9-x} = 2x - 9$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{9}{2} \\ 36(9-x) = 4x^2 - 36x + 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{9}{2} \\ 4x^2 = 243 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ (thỏa mãn).}$	0,25
	Vậy $S = \left\{ \frac{9\sqrt{3}}{2} \right\}$.	
	Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AD và trực tâm H. Gọi E là điểm trên (O) sao cho hai dây AE và BC song song với nhau. Đường thẳng EH cắt (O) tại điểm thứ hai là F và cắt đường trung trực của BC tại M.	3,00

	a) Chứng minh M là trung điểm của EH và AMOF là tứ giác nội tiếp.	1,00
	Vì hai dây AE và BC song song nên AH vuông góc với AE và trung trực của BC cũng là trung trực của AE.	0,25
	Tam giác AEH vuông tại A nên đường trung trực của AE cũng chính là đường trung bình của tam giác đó. Suy ra M là trung điểm của EH.	0,25
	Do đó $MA = ME = MH$, suy ra $\widehat{AMH} = \widehat{AEM} + \widehat{EAM} = 2\widehat{AEM}$, hay $\widehat{AMF} = 2\widehat{AEF}$.	0,25
	Mặt khác, ta có $\widehat{AOF} = 2\widehat{AEF}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung AF) Suy ra $\widehat{AMF} = \widehat{AOF}$, do đó tứ giác AMOF nội tiếp. (1)	0,25
	b) Chứng minh $\widehat{OFA} + \widehat{ODF} = 180^\circ$.	1,00
	Gọi N là giao điểm thứ hai của AH với (O). Ta có $\widehat{CBN} = \widehat{CAN}$ (cùng chắn cung CN). Ta lại có $\widehat{CBH} = \widehat{CAN}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$). Suy ra $\widehat{CBH} = \widehat{CBN}$. Tam giác BHN có BD vừa là đường cao vừa là phân giác nên D là trung điểm của HN.	0,25
	Tứ giác AENF nội tiếp (O) và AN cắt EF tại H nên ta có $HA.HN = HE.HF \Leftrightarrow HA.2HD = 2HM.HF \Leftrightarrow HA.HD = HM.HF$. Suy ra tứ giác AMDF nội tiếp. (2)	0,25
	Từ (1) và (2) ta có AODF nội tiếp. Suy ra $\widehat{OAF} + \widehat{ODF} = 180^\circ$.	0,25
	Mặt khác, tam giác OAF cân tại O nên $\widehat{OAF} = \widehat{OFA}$. Suy ra $\widehat{OFA} + \widehat{ODF} = 180^\circ$.	0,25
	c) Gọi K là điểm đối xứng với A qua O. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng FK tại T. Chứng minh hai đường thẳng TH và BC song song với nhau.	1,00
	Ta có $\widehat{ATF} = \widehat{FAK}$ (cùng phụ với $\widehat{AKF}$). (3) Ta lại có $\widehat{EAN} = 90^\circ$ nên EN là đường kính của (O). Tứ giác AEKN có hai đường chéo AK và NE bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên AEKN là hình chữ nhật. Suy ra $AE = NK$, hay $\widehat{AE} = \widehat{NK}$.	0,25
	Ta có $\widehat{FAK} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{KN} + \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{NF} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AE} + \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{NF} = \widehat{AHE}$. (4)	0,25
	Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{ATF} = \widehat{AHE}$, do đó tứ giác ATFH là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{AHT} = \widehat{AFT} = 90^\circ$.	0,25
	Ta có $AH \perp TH$ và $AH \perp BC$ nên $TH \parallel BC$.	0,25
5 (2,0 điểm)	a) Tìm tất cả các số thực a sao cho $a + \sqrt{2023}$ và $\frac{999}{a} + \sqrt{2023}$ đều là các số nguyên.	1,00

Đặt $\begin{cases} x = a + \sqrt{2023} \\ y = \frac{999}{a} + \sqrt{2023} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x - \sqrt{2023} \\ y = \frac{999}{x - \sqrt{2023}} + \sqrt{2023} \end{cases}$.	0,25
Ta có $y = \frac{999}{x - \sqrt{2023}} + \sqrt{2023} \Leftrightarrow xy - y\sqrt{2023} = 999 + x\sqrt{2023} - 2023$	0,25
$\Leftrightarrow xy + 1024 = (x + y)\sqrt{2023}$.	0,25
Vì x, y nguyên nên $x + y = 0$, suy ra $y = -x$ và $xy + 1024 = 0$. Do đó $x = \pm 32$. Vậy $a = \pm 32 - \sqrt{2023}$.	0,25
b) Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $4a^2 + b^2 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{4a}{2+b} + \frac{b}{1+a} + \frac{2024}{2a+b}$	1,00
Ta có $4a^2 + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow 2(4a^2 + b^2) \geq (2a + b)^2$ $\Leftrightarrow 4 \geq (2a + b)^2 \Leftrightarrow 2a + b \leq 2 \Leftrightarrow a + \frac{b}{2} \leq 1$. Đặt $x = a; y = \frac{b}{2}$, ta có $x + y \leq 1$. Khi đó $\frac{1}{2}T = \frac{a}{1+\frac{b}{2}} + \frac{b}{2(1+a)} + \frac{506}{a+\frac{b}{2}} = \frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} + \frac{506}{x+y}$.	0,25
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có • $\frac{x}{1+y} + \frac{4}{9}x(1+y) \geq \frac{4}{3}x \Leftrightarrow \frac{x}{1+y} \geq \frac{8}{9}x - \frac{4}{9}xy$. • $\frac{y}{1+x} + \frac{4}{9}y(1+x) \geq \frac{4}{3}y \Leftrightarrow \frac{y}{1+x} \geq \frac{8}{9}y - \frac{4}{9}xy$.	0,25
Suy ra $\frac{1}{2}T \geq \frac{8}{9}(x+y) - \frac{8}{9}xy + \frac{506}{x+y} \geq \frac{8}{9}(x+y) + \frac{8}{9(x+y)} + \frac{4546}{9(x+y)} - \frac{8}{9}xy$. $\geq \frac{8}{9} \cdot 2 + \frac{4546}{9} - \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1520}{3}$. (đề ý $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$)	0,25
Do đó $T \geq \frac{3040}{3}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$ hay $a = \frac{1}{2}; b = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\frac{3040}{3}$ đạt được khi $a = \frac{1}{2}; b = 1$.	0,25

Chú ý:

- Học sinh làm cách khác đáp án nhưng kết quả đúng vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài chấm điểm lẻ đến 0,25.

----- HẾT -----