

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1. (1,0 điểm) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$

Tính giá trị của biểu thức $M = (x + \sqrt{1+y^2})(y + \sqrt{1+x^2})$

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình : $\sqrt{x+4} + |x| = x^2 - x - 4$

b) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \frac{x}{y+z} = 2x-1 \\ \frac{y}{z+x} = 3y-1 \\ \frac{z}{x+y} = 5z-1 \end{cases}$$

Câu 3. (1,5 điểm) Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh BC và CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\angle MAN = 45^\circ$

a) Chứng minh MN tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AB

b) Kẻ $MP \parallel AN$ ($P \in AB$) và kẻ NQ song song với AM ($Q \in AD$). Chứng minh $AP = AQ$

Câu 4. (2,0 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c=3$

a) Chứng minh rằng $ab+bc+ca \leq 3$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1}$

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại I . Đường thẳng qua A vuông góc với IH tại K và cắt BC tại M

a) Chứng minh tứ giác $IFKC$ nội tiếp và $\frac{BI}{BD} = \frac{CI}{CD}$

b) Chứng minh M là trung điểm của BC

Câu 6. (1,0 điểm) Số nguyên dương n được gọi là “số tốt” nếu $n+1$ và $8n+1$ đều là các số chính phương

a) Hãy chỉ ra ví dụ ba “số tốt” lần lượt có 1, 2, 3 chữ số

b) Tìm các số nguyên k thỏa mãn $|k| \leq 10$ và $4n+k$ là hợp số với mọi n là “số tốt”

ĐÁP ÁN

Câu 1. (1,0 điểm) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$

Tính giá trị của biểu thức $M = (x + \sqrt{1+y^2})(y + \sqrt{1+x^2})$

Ta có :

$$\begin{aligned} xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} &= 1 \Rightarrow \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1 - xy \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (1+x^2)(1+y^2) = 1 - 2xy + x^2y^2 \\ 1 - xy \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1 - 2xy + x^2y^2 \\ xy \leq 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 0 \\ xy \leq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ xy \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ta được

$$\begin{aligned} M &= (x + \sqrt{1+y^2})(y + \sqrt{1+x^2}) \\ &= (x + \sqrt{1+x^2})(-x + \sqrt{1+x^2}) = (1+x^2) - x^2 = 1 \end{aligned}$$

Câu 2. (2,5 điểm)

c) Giải phương trình : $\sqrt{x+4} + |x| = x^2 - x - 4$

Điều kiện : $x \geq -4$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sqrt{x+4} + |x| &= |x|^2 - (\sqrt{x+4})^2 \\ \Leftrightarrow (|x| - \sqrt{x+4})(|x| + \sqrt{x+4}) - (|x| + \sqrt{x+4}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (|x| + \sqrt{x+4})(|x| - \sqrt{x+4} - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + \sqrt{x+4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases} (ktm) \\ |x| - \sqrt{x+4} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}; x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$

d) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \frac{x}{y+z} = 2x-1 \\ \frac{y}{z+x} = 3y-1 \\ \frac{z}{x+y} = 5z-1 \end{cases}$$

Từ giả thiết, suy ra $x, y, z \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{x}{y+z} = 2x-1 \\ \frac{y}{z+x} = 3y-1 \\ \frac{z}{x+y} = 5z-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{x}{y+z} + 1 \\ 3y = \frac{y}{z+x} + 1 \\ 5z = \frac{z}{x+y} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{x+y+z}{y+z} \\ 3y = \frac{x+y+z}{z+x} \\ 5z = \frac{x+y+z}{x+y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x(y+z) = 3y(x+z) = 5z(x+y) = x+y+z$$

Đặt $xy = a, yz = b, xz = c$

Ta có:
$$\begin{cases} 3a+3b = 2a+2c \Rightarrow a = 2c-3b \\ 3a+3b = 5b+5c \Rightarrow 3(2c-3b)+3b = 5b+5c \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6c-6b = 5b+5c \Rightarrow c = 11b \Rightarrow a = 2.11b-3b = 19b. \text{ Nên :}$$

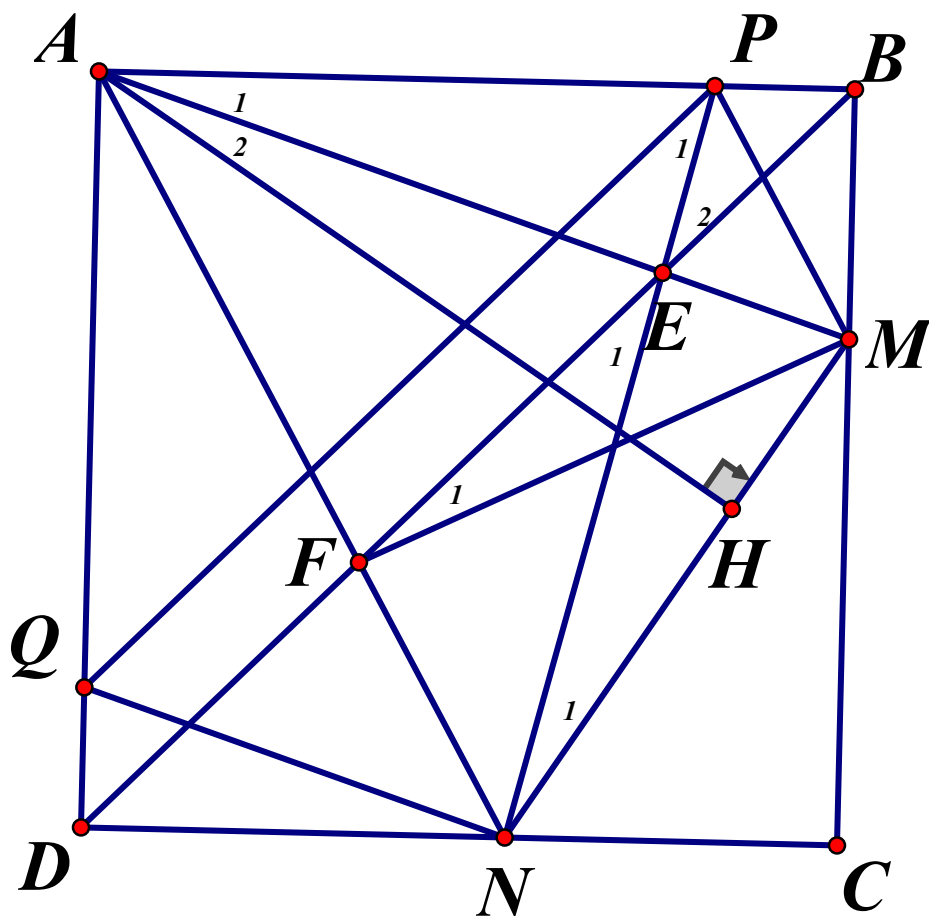
$$\begin{cases} xy = 19yz \\ xz = 11yz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 19z \\ x = 11y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{19}x \\ y = \frac{1}{11}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x(y+z) = x+y+z \Rightarrow 2x\left(\frac{1}{19} + \frac{1}{11}\right)x = x + \frac{1}{19}x + \frac{1}{11}x$$

$$\Rightarrow x = \frac{239}{60}; y = \frac{239}{60}; z = \frac{239}{1140}$$

Vậy $x = \frac{239}{60}; y = \frac{239}{60}; z = \frac{239}{1140}$

Câu 3. (1,5 điểm) Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh BC và CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\angle MAN = 45^\circ$



c) Chứng minh MN tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AB

Kẻ $AH \perp MN$ ($H \in MN$). Gọi E và F lần lượt là giao điểm của BD với AM, AN

Xét tứ giác $ABMF$ có $\angle MAN = \angle FBM = 45^\circ$ và $\angle MAN, \angle FBM$ cùng nhìn cạnh FM nên tứ giác $ABMF$ nội tiếp $\Rightarrow \angle A_1 = \angle F_1 = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{BM}$ (1) và $\angle AFM = 90^\circ$

Xét tứ giác $AEND$ có $\angle MAN = \angle EDN = 45^\circ$ và $\angle MAN, \angle EDN$ cùng nhìn cạnh EN nên tứ giác $AEND$ nội tiếp $\Rightarrow \angle AEN = 90^\circ$ (vì $\angle ADN = 90^\circ$)

Ta có $\angle MEN = \angle MFN = 90^\circ$ nên tứ giác $MEFN$ nội tiếp

$$\Rightarrow \angle F_1 = \angle N_1 = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{EN} \quad (2)$$

Mặt khác $\angle A_2 = \angle N_1$ (cùng phụ $\angle AMN$) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow \triangle ABM = \triangle AHM$ (ch - gn) $\Rightarrow AB = AH$

Vậy MN tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AB

d) Kẻ $MP \parallel AN$ ($P \in AB$) và kẻ NQ song song với AM ($Q \in AD$). Chứng minh

$$AP = AQ$$

Ta có : $\angle AMP = \angle MAN = \angle ANQ = 45^\circ$ (so le trong)

$$\angle AMP = \angle EMP = \angle PBE = 45^\circ$$

Nên tứ giác $PBME$ nội tiếp $\Rightarrow \angle PEM = 90^\circ$

$\Rightarrow PE \perp AM$ mà $NE \perp AM$ (cmt) $\Rightarrow P, E, N$ thẳng hàng

Chứng minh tương tự : Q, F, M thẳng hàng

$\angle PNQ = \angle QMP = 90^\circ$ nên tứ giác $PQNM$ nội tiếp $\Rightarrow \angle P_1 = \angle M_1$

Lại có tứ giác $FEMN$ nội tiếp $\Rightarrow \angle E_1 = \angle M_1$ mà $\angle E_1 = \angle E_2$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \angle P_1 = \angle E_2$. Ta có $PQ \parallel BD \Rightarrow \angle APQ = \angle ABD = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle APQ$ vuông cân tại A nên $AP = AQ$

Câu 4. (2,0 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c = 3$

c) Chứng minh rằng $ab + bc + ca \leq 3$

Ta có : $a + b + c = 3$

$$(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 3 \text{ (vì } a + b + c = 3)$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1}$

$$\text{Ta có : } \frac{a}{b^2 + 1} = a - \frac{ab^2}{b^2 + 1} \quad (1)$$

$$b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow \frac{1}{b^2 + 1} \leq \frac{1}{2b} \Rightarrow -\frac{ab^2}{b^2 + 1} \geq \frac{-ab^2}{2b} \Leftrightarrow -\frac{ab^2}{b^2 + 1} \geq \frac{-ab}{2} \quad (2)$$

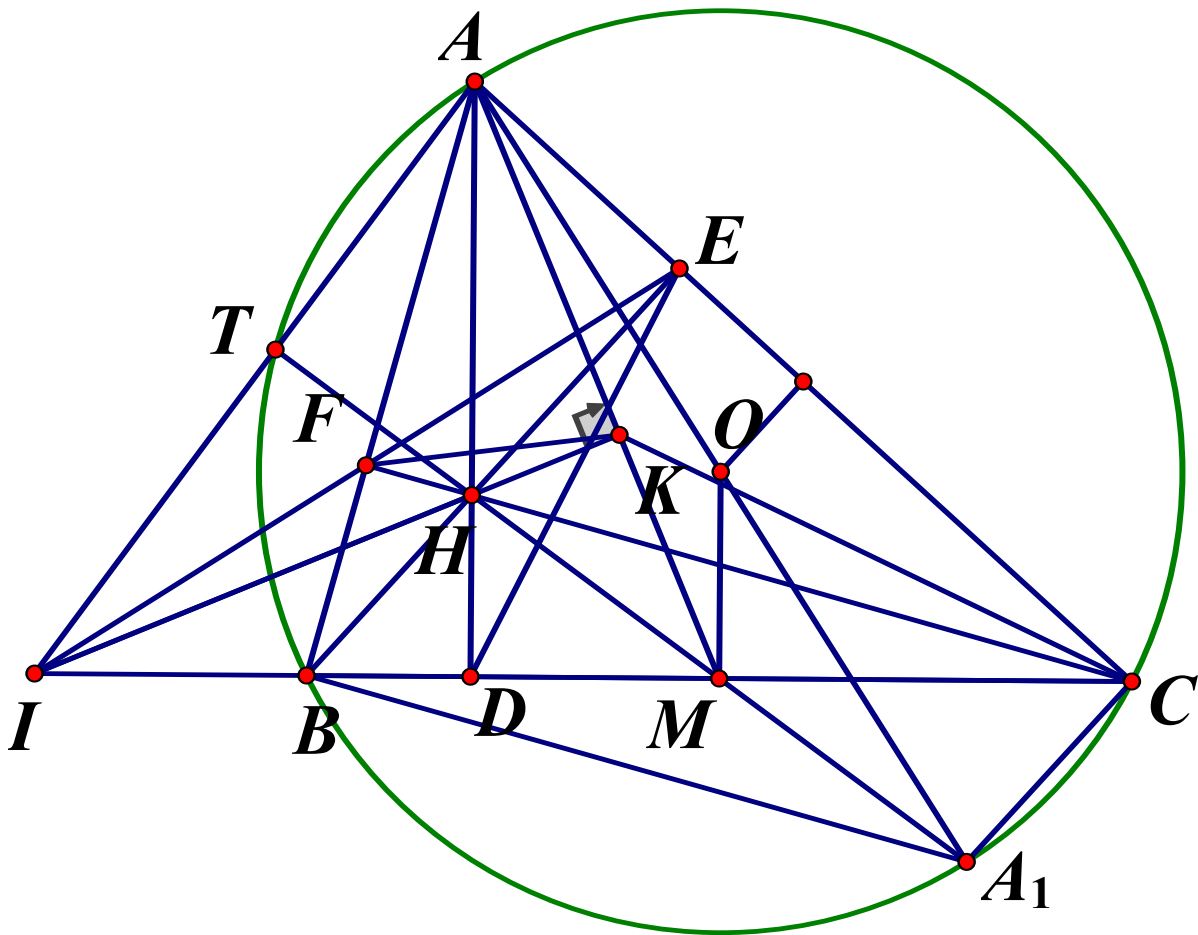
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{a}{b^2 + 1} \geq a - \frac{ab}{2} (*)$. Chứng minh tương tự :

$$\frac{b}{c^2 + 1} \geq b - \frac{bc}{2}; \quad \frac{c}{a^2 + 1} \geq c - \frac{ac}{2} (**)$$

$$\text{Từ } (*), (**) \Rightarrow P \geq (a + b + c) - \frac{ab + bc + ca}{2} \Rightarrow P \geq 3 - \frac{3}{2} \Rightarrow P \geq \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại I . Đường thẳng qua A vuông góc với IH tại K và cắt BC tại M



c) Chứng minh tứ giác $IFKC$ nội tiếp và $\frac{BI}{BD} = \frac{CI}{CD}$

Ta có : $\angle AFH = \angle AKH = \angle AEH = 90^\circ \Rightarrow F, H, K, E, A$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AH \Rightarrow \angle FKH = \angle FEH$ hay $\angle FKI = \angle FEB$ (1)

Cũng có $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ \Rightarrow B, F, E, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính $BC \Rightarrow \angle FEB = \angle FCB$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\angle FKI = \angle FCB$ hay $\angle FKI = \angle FCI \Rightarrow IFKC$ nội tiếp

Ta có : Tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên $\angle FEB = \angle FCB$ (3)

Ta có $\angle HDC = \angle HEC = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $HDCE$ nội tiếp đường tròn đường kính $HC \Rightarrow \angle HED = \angle HCD$ hay $\angle BED = \angle FCB$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\angle FEB = \angle FCB \Rightarrow EB$ là phân giác trong góc E của $\triangle IED$

Mà $EC \perp EB \Rightarrow EC$ là phân giác ngoài góc E của $\triangle IED$

$\Rightarrow \frac{BI}{BD} = \frac{CI}{CD} = \frac{EI}{ED}$ (tính chất đường phân giác)

d) Chứng minh M là trung điểm của BC

Xét $\triangle AIM$ có hai đường cao AD và IK cắt nhau tại $H \Rightarrow H$ là trực tâm

$\Rightarrow MH \perp AI$ hay $MT \perp AI \Rightarrow \angle HTA = 90^\circ \Rightarrow T$ thuộc đường tròn đường kính AH

Mà F, H, E, A thuộc đường tròn đường kính AH

Nên 5 điểm T, F, H, K, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH

$\Rightarrow IT.IA = IF.IE (*)$

Mặt khác, tứ giác $BFEC$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow IF.IE = IB.IC (**)$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow IT.IA = IB.IC \Rightarrow TACB$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow T$ thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle ABC$

Kẻ đường kính AA_1 của (O)

Ta có $\angle ATA_1 = 90^\circ \Rightarrow AT \perp A_1T \Rightarrow A_1T \perp IA$ mà $MT \perp AI$

$\Rightarrow A_1, T, H, M$ thẳng hàng

Mà ta dễ chứng minh A_1BHC là hình bình hành và M là giao điểm của BC và A_1H nên M là trung điểm của BC

Câu 6. (1,0 điểm) Số nguyên dương n được gọi là “số tốt” nếu $n+1$ và $8n+1$ đều là các số chính phương

c) Hãy chỉ ra ví dụ ba “số tốt” lần lượt có 1, 2, 3 chữ số

Ta có $n=3 \Rightarrow n+1=4; 8n+1=25$ đều là các số chính phương

$n=15 \Rightarrow n+1=16; 8n+1=121$ đều là các số chính phương

$n=120 \Rightarrow n+1=121; 8n+1=961$ đều là các số chính phương

Vậy $n=3, n=15, n=120$ là ba số tốt

d) Tìm các số nguyên k thỏa mãn $|k| \leq 10$ và $4n+k$ là hợp số với mọi n là “số tốt”

Ta có $n+1$ và $8n+1$ là hai số chính phương

Nếu $n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow n+1 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow k \equiv 2 \pmod{3}$

Nếu $n \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 8n+1 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow k \equiv 2 \pmod{3}$

Vậy $n \equiv 3 \pmod{3}$

Với $k \in \{1; -1; 5; -5; 7; -7; -9; -10\}$ thì $4k+1$ là số nguyên tố

Với $k \in \{0; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; 9; 10\}$ dễ thấy $4n+k$ khác 2 và 3 nên $4n+k$ là hợp số

Vậy $k \in \{0; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; 9; 10\}$