

**ĐÁP ÁN ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO THPT CHUYÊN TỈNH KIÊN
GIANG NĂM 2025 - 2026
MÔN TOÁN CHUYÊN**

Bài 1 (2,0 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$.

1. Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A.
2. Tìm x để $A = -\frac{3}{2}$.

Lời giải.

1. Điều kiện xác định: $x > 0$ và $x \neq 1$.
Với điều kiện đó,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - \sqrt{x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}-1+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \times \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

2. Với điều kiện xác định, ta có:

$$\begin{aligned} A = -\frac{3}{2} &\Leftrightarrow \frac{1-x}{\sqrt{x}} = \frac{-3}{2} \\ &\Leftrightarrow 2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{-1}{2} \text{ hoặc } \sqrt{x} = 2 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \text{ (TM)}. \end{aligned}$$

Vậy $x = 4$ là số thực duy nhất thỏa mãn yêu cầu. □

Bài 2 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{1}{x-3} + \sqrt{4y^2 + 8y + 4} = 8 \\ \frac{1}{x-3} - |y+1| = 10 \end{cases}.$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x \neq 3$. Đặt $\frac{1}{x-3} = u$ và $|y+1| = v$, khi đó hệ ban đầu trở thành:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u+2v=8 \\ 3u-v=10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-3}=4 \\ |y+1|=2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3\frac{1}{4} \\ y=1 \text{ hoặc } y=-3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Đến đây ta kết luận rằng $(x;y) = \left(3\frac{1}{4}; 1\right), (x;y) = \left(3\frac{1}{4}; -3\right)$ là tất cả các nghiệm của hệ phương trình. □

Bài 3 (1,0 điểm). Cho đa thức $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ và $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 10x - 10$. Biết $x = a$ là một nghiệm của $P(x)$ và $x = b$ là một nghiệm của $Q(x)$. Chứng minh rằng $a + b = 1$.

Lời giải thứ 1. Từ giả thiết đề bài, ta có được $a^3 + 2a^2 + 3a + 4 = 0$ và $b^3 - 5b^2 + 10b - 10 = 0$. Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} 0 &= a^3 + 2a^2 + 3a + 4 + b^3 - 5b^2 + 10b - 10 \\ &= a^3 + (b^3 - 3b^2 + 3b - 1) + 2a^2 - (2b^2 - 4b + 2) + 3a + 3b - 3 \\ &= a^3 + (b - 1)^3 + 2[a^2 - (b - 1)^2] + 3(a + b - 1) \\ &= (a + b - 1)(a^2 + b^2 - ab + 3a - 4b + 6) \\ &= \frac{1}{12}(a + b - 1)(3(2a - b + 3)^2 + (3b - 5)^2 + 20). \end{aligned}$$

Do đó $a + b = 1$. □

Lời giải thứ 2. Ta sẽ chứng minh rằng $1 - b$ là nghiệm của $P(x)$. Thực vậy ta có:

$$\begin{aligned} P(1 - b) &= (1 - b)^3 + 2(1 - b)^2 + 3(1 - b) + 4 \\ &= 1 - 3b + 3b^2 - b^3 + 2 - 4b + 2b^2 + 3 - 3b + 4 \\ &= -b^3 + 5b^2 - 10b + 10 = 0. \end{aligned}$$

Còn phải chứng minh $P(x)$ có duy nhất một nghiệm thực. Giả sử $P(x)$ có hai nghiệm thực phân biệt x, y . Không mất tính tổng quát ta giả sử $x > y$. Ta có:

$$\begin{aligned} P(x) - P(y) &= x^3 + 2x^2 + 3x + 4 - y^3 - 2y^2 - 3y - 4 \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y + 3) \\ &= (x - y) \left[\frac{1}{2} \left(\left(x + y + \frac{4}{3} \right)^2 + \left(x + \frac{2}{3} \right)^2 + \left(y + \frac{2}{3} \right)^2 \right) + \frac{5}{3} \right] > 0 \end{aligned}$$

, điều này trái với một điều khác là $P(x) - P(y) = 0 - 0 = 0$.

Vậy do a và $1 - b$ đều là hai nghiệm của $P(x)$ nên $a = 1 - b$ hay $a + b = 1$. □

Lời giải thứ 3. Việc chứng minh $P(1 - b) = 0$ được thực hiện tương tự như cách đầu.

Giả sử $P(x)$ có hai nghiệm thực phân biệt là m và n . Khi đó áp dụng định lý Bézout ta được:

$$P(x) = (x - m)(x - n)R(x),$$

trong đó $R(x)$ là đa thức. Mà do $P(x)$ là đa thức bậc ba và $(x - m)(x - n)$ là đa thức bậc hai nên $R(x)$ phải là đa thức bậc nhất.

Đặt $R(x) = a'x - p$, trong đó a' là số khác 0. Hệ số cao nhất của $P(x)$ là 1 nên ta phải có:

$$1 \times 1 \times a' = 1 \text{ hay } a' = 1.$$

Ta lại có khai triển sau:

$$P(x) = (x - m)(x - n)(x - p) = x^3 - (m + n + p)x^2 + (mn + np + pm)x - mnp,$$

Do đó để $P(x)$ đồng nhất với $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ thì m, n, p phải thoả mãn hệ thức sau:

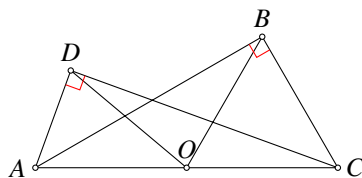
$$\begin{cases} -(m + n + p) = 2 \\ mn + mp + np = 3 \\ -mnp = 4 \end{cases}.$$

Nhưng lúc này $4 = (m + n + p)^2 = m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2mp + 2np$ nên $m^2 + n^2 + p^2 = -2$, vô lý.

Do vậy $P(x)$ chỉ có duy nhất một nghiệm thực, và vì a và $1 - b$ đều là hai nghiệm của $P(x)$ nên $a = 1 - b$ hay $a + b = 1$. □

Chú thích. Ở bài này, nếu học sinh khẳng định rằng “vì a và $1 - b$ là hai nghiệm của $P(x)$ nên $a = 1 - b$ ” mà không chứng minh thì chắc chắn sẽ mất điểm (cụ thể là từ 0,5 đến 0,75 điểm), bởi nếu cách lập luận này luôn đúng, chẳng lẽ ta lại có “Xét đa thức $R(x) = xx - 9$. Vì $R(3) = R(-3) = 0$ nên $3 = -3$ ” (!)

Bài 4 (1,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Kẻ EK vuông góc với AC tại K , DI vuông góc EC tại I . Chứng minh IK vuông góc BC .



Hình 1:

Lời giải. Ta phát biểu tính chất sau cho các bài 4 và 5.

Nhận xét. Bốn điểm đôi một phân biệt A, B, C, D có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ thì nằm trên một đường tròn.

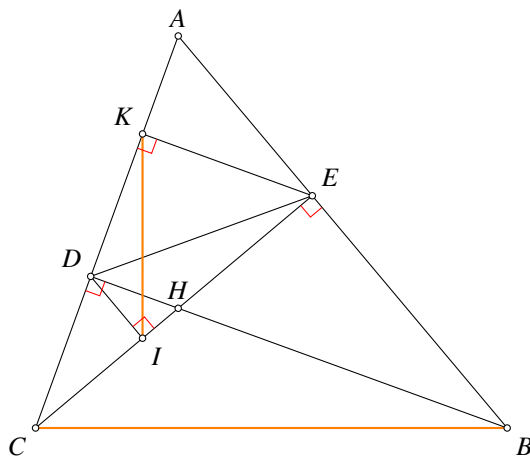
Chứng minh. Gọi O là trung điểm của AC .

Tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 90^\circ$ nên theo tính chất đường trung tuyến:

$$OA = OC = OB = \frac{AC}{2}.$$

Tương tự, $OD = \frac{AC}{2}$ nên A, B, C, D nằm trên đường tròn $\left(O; \frac{AC}{2}\right)$ □

Quay lại bài toán. Xét thể hình sau đây.



Hình 2:

Tứ giác $KEID$ có $\widehat{EKC} = \widehat{EID} = 90^\circ$ (do $EK \perp AC$ và $DI \perp EC$) nên $KEID$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{IKD} = \widehat{IED}$ (cùng chắn ID).

Mặt khác $BCDE$ cũng là tứ giác nội tiếp (do $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$) nên $\widehat{DEA} = \widehat{ACB}$.

Bây giờ, ta có $\widehat{IKC} + \widehat{ACB} = \widehat{DEI} + \widehat{AED} = \widehat{CEA} = 90^\circ$ nên $IK \perp BC$. □

Bài 5 (2,5 điểm). Cho đường tròn (O) hai đường kính AD và BC vuông góc với nhau. Lấy điểm E thuộc cung nhỏ AC (E khác A và C). Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng AB và CE . Kẻ AH vuông góc với FC ($H \in FC$), AC cắt OH tại I .

Chứng minh rằng:

1. Tứ giác $AHCO$ nội tiếp trong một đường tròn.
2. HO là tia phân giác của $\widehat{AHC}$ và $AI \cdot AH = HF \cdot CI$.
3. Ba điểm F, I, D thẳng hàng.

Lời giải. Xét thể hình sau.

1. Dễ thấy $\widehat{AHC} = \widehat{AOC} = 90^\circ$, do đó áp dụng tính chất đã nêu ở câu 4 ta được ngay $AHCO$ là tứ giác nội tiếp.

vì $-9n_0 \equiv 0 \pmod{9}$ và $54 \equiv 0 \pmod{9}$. Do đó,

$$n_0^3 \equiv 0 \pmod{9}.$$

Điều này chỉ xảy ra khi $3 \mid n_0$. Đặt $n_0 = 3k$ với $k \in \mathbb{N}$. Ta có:

$$n_0^3 - 9n_0 + 54 = (3k)^3 - 9(3k) + 54 = 27k^3 - 27k + 54 = 27(k^3 - k) + 54.$$

Vì $n_0^3 - 9n_0 + 54$ chia hết cho 81, ta lần lượt thu được những điều sau:

$$\begin{aligned} 27(k^3 - k) + 54 &\equiv 0 \pmod{81}, \\ 27(k^3 - k) &\equiv -54 \equiv 27 \pmod{81}, \\ k^3 - k &\equiv 1 \pmod{3}. \end{aligned}$$

Mặt khác ta có với mọi số nguyên k :

$$k^3 - k = (k-1)k(k+1) \vdots 3$$

, và điều này mâu thuẫn trực tiếp với điều được thu ở trên.

Vậy giả sử ban đầu của ta là không đúng, do đó điều cần chứng minh phải đúng. □

Lời giải thứ 2. Xét bảng sau đây.

$n \% 27$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^3 - 9n + 54 \% 81$	54	46	44	54	1	53	54	10	8
$n \% 27$	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$n^3 - 9n + 54 \% 81$	54	73	71	54	28	80	54	37	35
$n \% 27$	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$n^3 - 9n + 54 \% 81$	54	19	17	54	55	26	54	64	62

Bảng 1: Bảng số dư của $n^3 - 9n + 54$ cho 81, ứng với số dư của n khi chia cho 27.

Căn cứ vào bảng số dư ta có được điều cần chứng minh. □

Bài 7 (1,0 điểm). Một dãy số gồm các số tự nhiên $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$. Biết $a_1 = 1; a_n = 80$, dãy số được sắp xếp theo thứ tự tăng dần và số đứng sau bằng tổng hai số đứng trước hoặc gấp đôi số đứng trước. Tìm giá trị nhỏ nhất của n ?

Lời giải. Chúng tôi xin phép được chỉnh sửa nội dung câu hỏi như sau:

Bài. Xét số nguyên dương $n \geq 3$ thỏa mãn có một dãy số tự nhiên tăng ngặt $a_1; a_2; \dots; a_n$ thỏa mãn đồng thời ba điều kiện sau:

- $a_1 = 1; a_n = 80$.
- Số hạng thứ hai bằng hai lần số hạng thứ nhất, và
- Kể từ số hạng thứ ba trở đi, mỗi số hạng của dãy này hoặc bằng tổng của hai số hạng đứng liền trước nó hoặc bằng hai lần của số hạng đứng ngay trước đó.

Khi đó hãy tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Ta gọi số nguyên dương n thỏa mãn tồn tại [ít nhất] một dãy số đáp ứng đủ các điều kiện ở lệnh hỏi là “số đẹp”. Trước tiên, ta phải chỉ ra nếu n là số đẹp thì $n \geq 8$. Chứng minh của nó như phần dưới đây.

Chứng minh. Giả sử có dãy số $a_1; \dots; a_n$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Khi đó từ điều kiện ii. ta được ngay $a_2 = 2$. Điều này cũng cho ta $n \geq 4$ (vì nếu $n = 3$ là số đẹp thì đồng nghĩa với dãy $1; 2; 80$ thỏa mãn các yêu cầu lệnh hỏi, cho ta $1 + 2 = 80$ hoặc $2 \times 2 = 80$ (vô lý)).

Ta có nhận xét sau:

Nhận xét. $a_i \leq 2^{i-1}$ với mọi $i = 2; \dots; n$.

Chứng minh. Ta có $a_2 = 2^{2-2}$ nên nhận xét đúng với $i = 2$.

Từ điều kiện iii., ta suy ra $a_3 = 3$ hoặc $a_3 = 4$ và $3 < 4 = 2^{3-1}$, nên nhận xét đúng với $i = 3$.

Giả sử nhận xét đúng với $i = k$ và $i = k + 1$, trong đó k là số nguyên dương khác 1 và nhỏ hơn $n - 1$. Xét hai trường hợp:

- Nếu $a_{k+2} = 2a_{k+1}$ thì $a_{k+2} \leq 2 \times 2^k = 2^{k+1}$.

- Nếu $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ thì $a_{k+1} \leq 2^{k-1} + 2^k < 2^k + 2^k = 2^{k+1}$.

Vậy khi đó nhận xét cũng đúng với $i = k + 2$, và theo nguyên lý quy nạp ta có điều cần nhận xét. □

Do đó áp dụng nhận xét ta có: $a_n = 80 \leq 2^{n-1}$, do đó $n \geq 8$. □

Tiếp theo, ta thấy dãy số có 8 số hạng sau đây:

$$1; 2; 3; 5; 10; 20; 40; 80$$

có: $2 = 2 \times 1, 3 = 1 + 2, 5 = 2 + 3, 10 = 2 \times 5, 20 = 2 \times 10, 40 = 2 \times 20, 80 = 2 \times 40$, thế nên nó thỏa mãn các điều kiện ở đề bài.

Kết luận: $n = 8$ là giá trị cần tìm. □

Bài 8 (0,5 điểm). Cho hai số thực x và y thỏa mãn phương trình $3x^2 + y^2 = 9$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 3x + y$.

Lời giải thứ 1. Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta được

$$\begin{aligned} (3+1)(3x^2+y^2) &\geq (3x+y)^2 = T^2 \\ \Rightarrow T^2 &\leq 4 \cdot 9 = 36 \\ \Rightarrow -6 &\leq T \text{ và } T \leq 6. \end{aligned}$$

Dấu bằng ở mỗi bất đẳng thức tương ứng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = -\frac{3}{2}$ hoặc $x = y = \frac{3}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất cần tìm tương ứng là 6 và -6. □

Lời giải thứ 2. Giả sử (x, y) là một nghiệm của phương trình ở lệnh hỏi, ta chứng minh $-6 \leq T \leq 6$. Thực vậy ta có $y = T - 3x$ nên thế vào phương trình đã cho ta được:

$$3x^2 + (T - 3x)^2 = 9 \Leftrightarrow 12x^2 - 6Tx + T^2 - 9 = 0. \quad (1)$$

Phương trình (1) là phương trình bậc hai theo x , và nó có nghiệm theo giả sử. Điều này cho ta:

$$\Delta' = 9T^2 - 12 \cdot (T^2 - 9) \geq 0 \Leftrightarrow T^2 \leq 36 \Leftrightarrow -6 \leq T \leq 6.$$

Mặt khác, khi $x = y = \frac{3}{2}$ thì $3x + y = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 6$ và khi $x = y = -\frac{3}{2}$ thì $3x + y = -6$.

Do đó: giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của T tương ứng là 6 và -6. □