

Câu 1. (3,0 điểm)

- 1) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$. Chứng minh

$$\frac{bc+1}{a^2+1} + \frac{ac+1}{b^2+1} + \frac{ba+1}{c^2+1} = 3$$

- 2) Cho đa thức $P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+2022)$. Khi khai triển đa thức $P(x)$ ta được

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2021}x^{2021} + a_{2022}x^{2022}. \text{ Tính giá trị của biểu thức}$$

$$S = \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021}}{a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022}} - \frac{a_0}{2(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021})}$$

Câu 2. (5,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $(x+1)(3x+\sqrt{x+1}-3) = 4\sqrt{x^3}-2$

- 2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(y+1)+y=3 \\ \sqrt{5-2(x+y)}+\sqrt{2-x^2y^2}=2 \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p^4 - q^2(p^2 + q^2 + 1) = (q^2 + 1)^2$
- 2) Cho m, n, p, q là các số nguyên thỏa mãn $(m+n+p+q):30$. Chứng minh rằng $(m^5 + n^5 + p^5 + q^5):30$

Câu 4. (7,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi BH và CQ là hai đường cao của tam giác ABC . Tiếp tuyến tại B và tại C của đường tròn (O) cắt nhau tại M . Đoạn thẳng OM cắt BC và cắt đường tròn (O) lần lượt tại N và D . Tia AD cắt BC tại F ; AM cắt BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K (K khác A).

- 1) Chứng minh rằng: $AB.KC = AC.KB$ và $\widehat{ABM} = \widehat{AHN}$.
- 2) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN . Chứng minh $\widehat{IOM} + \widehat{ADN} = 180^\circ$.
- 3) Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt QH tại G . Chứng minh ba điểm A, G, N thẳng hàng.

Câu 5. (2,0 điểm)

1) Lấy 2018 điểm phân biệt ở miền trong của một ngũ giác lồi cùng với 5 đỉnh của ngũ giác đó ta được 2023 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của ngũ giác là 1 đơn vị. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 2023 điểm đã cho có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4039}$ đơn vị.

- 2) Xét a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c \geq 3$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = \frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{a+b^2+c} + \frac{1}{a+b+c^2}$$

-----Hết-----