

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH TIỀN GIANG

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề có 02 trang)

KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
TRUNG HỌC SƠ SỞ

Năm học: 2024-2025

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Bài 1: (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ ($x > 0; x \neq 1$).

a. Rút gọn biểu thức P .

b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{2}{P} + \sqrt{x}$.

2. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $a+b+c=11$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc$.

Bài 2: (2,0 điểm) Chứng minh rằng $n^4 - 10n^2 + 9$ chia hết cho 384 với mọi n là số nguyên lẻ.

Bài 3: (2,0 điểm)

1. Chứng minh rằng với mọi a, b là số thực dương, ta luôn có:

$4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$. Dấu “=” xảy ra khi nào?

2. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a+b=4ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3 + b^3}{a^2b(a+b)^2} + \frac{4ab}{ab+b^2}.$$

Bài 4: (2,0 điểm) Giải phương trình $(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x^2}) = 4$.

Bài 5: (2,0 điểm) Cho phương trình $x^2 - 2(m-2)x - 2m = 0$ với x là ẩn số.

1. Chứng minh phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

2. Tìm giá trị của m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn:

$$x_2^2 + 4x_1 = 2m(x_1 + 1).$$

Bài 6: (2,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng

$(d): y = 2x + 3$.

1. Vẽ đồ thị (P) và (d) trên cùng một hệ tọa độ Oxy.

2. Gọi A, B là giao điểm của (P) và (d) . Điểm M là một điểm thay đổi trên (P) và có hoành độ là m ($-1 < m < 1$). Tìm m để tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

Bài 7: (2,0 điểm) Trong một kỳ thi chọn đội tuyển học sinh giỏi của trường, nếu sắp xếp mỗi phòng thi 12 học sinh thì còn thừa một em, còn nếu giảm một phòng thi thì số học sinh được chia

đều cho mỗi phòng. Hỏi có bao nhiêu học sinh tham dự kỳ thi, biết rằng mỗi phòng thi có không quá 24 học sinh?

Bài 8: (4,0 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC cố định của đường tròn thỏa mãn $BC < 2R$. Một điểm A di chuyển trên $(O; R)$ sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường phân giác của $\angle CHE$ kéo dài về hai phía cắt AB và AC lần lượt tại M và N .

1. Chứng minh tam giác AMN cân tại A .

2. Gọi I, P, Q lần lượt là hình chiếu của D trên các cạnh AB, BE, CF . Chứng minh rằng ba điểm I, P, Q cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với AO .

3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của $\angle BAC$ tại điểm thứ hai K . Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh.....Số báo

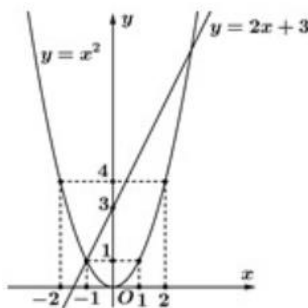
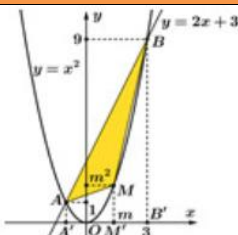
danh.....

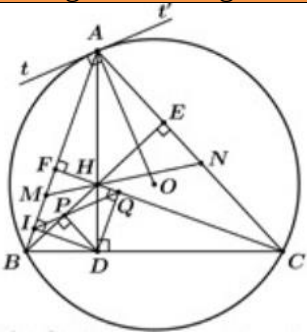
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH TIỀN GIANG ĐỀ CHÍNH THỨC <i>(Đề có 02 trang)</i>	KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH TRUNG HỌC SƠ SỞ Năm học: 2024-2025 ĐÁP ÁN, THANG ĐIỂM Môn thi: TOÁN <i>(Đáp án, thang điểm gồm 07 trang)</i>
---	--

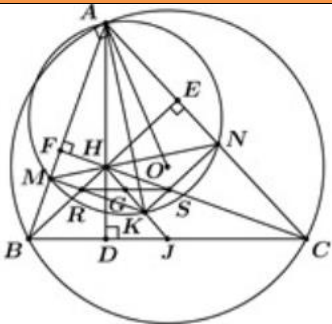
Bài	Nội dung	Điểm
1(4đ)	1. Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} \quad (x > 0; x \neq 1).$ a. Rút gọn biểu thức P. b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{2}{P} + \sqrt{x}.$	2,5
	a. Rút gọn biểu thức P.	1,75
	$P = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$	0,5
	$= \frac{(x+\sqrt{x}+1) - (x+2) - (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$	0,5
	$= \frac{-x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$	0,25
	$= \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$	0,25
	$= \frac{-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$	0,25
	b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{2}{P} + \sqrt{x}.$	0,75
	$Q = \frac{2}{P} + \sqrt{x} = \frac{2x+2\sqrt{x}+2}{-\sqrt{x}} - \frac{x}{-\sqrt{x}} = -\left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\right)$	0,25
	Theo BĐT Cauchy ta có: $\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 2 \geq 2\sqrt{2} + 2$	0,25
	Suy ra $MaxQ = -(2\sqrt{2} + 2).$ Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 2$	0,25
	2. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $a+b+c=11$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$ Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc.$	1,5

	Ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{abc} = 1 \Leftrightarrow ab+bc+ca = abc.$	0,5
	Khi đó $P = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca).$	0,5
	$= (a+b+c)^2 = 11^2 = 121.$	0,5
2 (2đ)	Chứng minh rằng $n^4 - 10n^2 + 9$ chia hết cho 384 với mọi n là số nguyên lẻ.	2,0
	Đặt $A = n^4 - 10n^2 + 9 = (n^4 - n^2) - (9n^2 - 9).$	0,25
	$= (n^2 - 1)(n^2 - 9) = (n-3)(n-1)(n+1)(n+3).$	0,5
	Vì n lẻ nên đặt $n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$). Suy ra $A = (2k-2)2k(2k+2)(2k+4) = 16(k-1)k(k+1)(k+2).$ $\Rightarrow A$ chia hết cho 16. (1)	0,5
	Vì $(k-1); k; (k+1); (k+2)$ là 4 số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3, một số chia hết cho 4 nên $(k-1)k(k+1)(k+2)$ chia hết cho 24. (2)	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho $16.24=384.$	0,25
3 (2đ)	1. Chứng minh rằng với mọi a, b là số thực dương, ta luôn có: $4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$. Dấu “=” xảy ra khi nào?	2,0
	2. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a+b=4ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^3 + b^3}{a^2b(a+b)^2} + \frac{4ab}{ab+b^2}.$	
	1. Chứng minh rằng với mọi a, b là số thực dương, ta luôn có: $4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$. Dấu “=” xảy ra khi nào?	1,0
	$4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3 \Leftrightarrow 3(a^3 + b^3) - 3ab(a+b) \geq 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0.$	0,25
	$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0$ (luôn đúng).	0,25
	Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.	0,25
	2. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a+b=4ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^3 + b^3}{a^2b(a+b)^2} + \frac{4ab}{ab+b^2}.$	1,0
	$P = \frac{a^3 + b^3}{a^2b(a+b)^2} + \frac{4ab}{ab+b^2} = \frac{a^3 + b^3}{a.ab(a+b)^2} + \frac{4ab}{b(a+b)}.$	0,25

	$\geq \frac{\frac{1}{4}(a+b)^3}{a \cdot \frac{1}{4}(a+b) \cdot (a+b)^2} + \frac{1}{b}.$	0,25
	$= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = 4.$	0,25
	Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}.$	0,25
4 (2đ)	Giải phương trình $(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x^2}) = 4.$	2,0
	Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1.$	0,25
	Ta có: $(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}.$	0,5
	Do đó phương trình đã cho tương đương với $(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 = 8 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2.$	0,5
	$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1-x^2} = 4.$	0,25
	$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$	0,5
5 (2đ)	Cho phương trình $x^2 - 2(m-2)x - 2m = 0$ với x là ẩn số. 1. Chứng minh phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. 2. Tìm giá trị của m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn: $x_2^2 + 4x_1 = 2m(x_1 + 1).$	2,0
	1. Chứng minh phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.	0,5
	$\Delta' = (m-2)^2 + 2m = m^2 - 2m + 4 = (m-1)^2 + 3 > 0, \forall m$	0,25
	Suy ra phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .	0,25
	2. Tìm giá trị của m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn: $x_2^2 + 4x_1 = 2m(x_1 + 1).$	1,5
	Theo định lý Vi-et, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m - 4.$	0,25
	Vì x_1 là nghiệm của phương trình đã cho nên $x_1^2 - 2(m-2)x_1 - 2m = 0 \Leftrightarrow (2m-4)x_1 = x_1^2 - 2m$	0,5
	Ta có $x_2^2 + 4x_1 = 2m(x_1 + 1) \Leftrightarrow x_2^2 = (2m-4)x_1 + 2m.$	0,5
	$\Leftrightarrow x_2^2 = x_1^2 - 2m + 2m \Leftrightarrow x_2^2 = x_1^2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$ (do $x_1 \neq x_2$)	0,5
	$\Leftrightarrow 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$	0,25
6 (2đ)	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 3.$ 1. Vẽ đồ thị (P) và (d) trên cùng một hệ tọa độ Oxy.	2,0

2. Gọi A,B là giao điểm của (P) và (d). Điểm M là một điểm thay đổi trên (P) và có hoành độ là m (−1 < m < 3). Tìm m để tam giác MAB có diện tích lớn nhất.																				
1. Vẽ đồ thị (P) và (d) trên cùng một hệ tọa độ Oxy.		0,75																		
Bảng giá trị của $y = x^2$ và $y = 2x + 3$ <table border="1"><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y=x²</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr></table> <table border="1"><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>y=2x+3</td><td>1</td><td>3</td></tr></table>		x	-2	-1	0	1	2	y=x ²	4	1	0	1	4	x	-1	0	y=2x+3	1	3	0,25
x	-2	-1	0	1	2															
y=x ²	4	1	0	1	4															
x	-1	0																		
y=2x+3	1	3																		
Vẽ (P) và (d) 		0,5																		
2. Gọi A,B là giao điểm của (P) và (d). Điểm M là một điểm thay đổi trên (P) và có hoành độ là m (−1 < m < 3). Tìm m để tam giác MAB có diện tích lớn nhất.		1,25																		
																				
Gọi $M(m; m^2) \in (P)$ với $-1 < m < 3$. Các điểm A', B', M' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, M trên trục hoành Ta có $S_{ABB'A'} = \frac{1}{2}(AA' + BB')A'B' = \frac{1}{2}(1 + 9) \cdot 4 = 20$.		0,25																		
$S_{AMM'A'} = \frac{1}{2}(AA' + MM')A'M' = \frac{1}{2}(1 + m^2) \cdot (1 + m)$.		0,25																		
$S_{MBB'M'} = \frac{1}{2}(MM' + BB')B'M' = \frac{1}{2}(m^2 + 9) \cdot (3 - m)$.		0,25																		
$S_{MAB} = S_{ABB'A'} - S_{AMM'A'} - S_{MBB'M'} = 8 - 2(m - 1)^2 \leq 8$, với mọi $-1 < m < 3$.		0,25																		
Suy ra tam giác MAB có diện tích lớn nhất bằng 8 $\Leftrightarrow m = 1$. Vậy m=1 là giá trị cần tìm		0,25																		

7 (2đ)	Trong một kỳ thi chọn đội tuyển học sinh giỏi của trường, nếu sắp xếp mỗi phòng thi 12 học sinh thì còn thừa một em, còn nếu giảm một phòng thi thì số học sinh được chia đều cho mỗi phòng. Hỏi có bao nhiêu học sinh tham dự kỳ thi, biết rằng mỗi phòng thi có không quá 24 học sinh?	2,0
	Gọi số phòng thi ban đầu là x (phòng), với $x \in \mathbb{N}^*, x \geq 2$. Số học sinh tham dự kỳ thi là $12x+1$. Số phòng sau khi giảm là $x-1$ (phòng). Nếu giảm một phòng thi thì số học sinh được chia đều cho mỗi phòng, khi đó mỗi phòng có y học sinh với $y \in \mathbb{N}^*, y \leq 24$.	0,5
	Ta có $(x-1)y = 12x+1 \Leftrightarrow y = \frac{12x+1}{x-1} = 12 + \frac{13}{x-1}$.	0,5
	Vì $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $(x-1) \in U(13) = \{1; 13\}$ hay $x \in \{2; 14\}$.	0,25
	- Nếu $x=2$ suy ra $y=25$ (loại) - Nếu $x=14$ suy ra $y=13$ (thỏa).	0,5
	Vậy số học sinh tham dự kỳ thi là $12.14+1=169$ học sinh	0,25
8 (4đ)	Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC cố định của đường tròn thỏa mãn $BC < 2R$. Một điểm A di chuyển trên $(O; R)$ sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường phân giác của $\angle CHE$ kéo dài về hai phía cắt AB và AC lần lượt tại M và N . 1. Chứng minh tam giác AMN cân tại A . 2. Gọi I, P, Q lần lượt là hình chiếu của D trên các cạnh AB, BE, CF . Chứng minh rằng ba điểm I, P, Q cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với AO . 3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của $\angle BAC$ tại điểm thứ hai K . Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.	4,0
	1. Chứng minh tam giác AMN cân tại A .	1,0
	 Ghi chú: Hình vẽ ít nhất thể hiện được đường phân giác và 3 đường cao.	0,25
	Ta có $\angle HEC = \angle HFB = 90^\circ$ nên $\begin{cases} \angle MHF + \angle FMH = 90^\circ \\ \angle ENH + \angle NHE = 90^\circ \end{cases} \quad (1).$ Vì HN là phân giác của $\angle CHE$ nên $\angle CHN = \angle NHE$.	0,25

Lại có $CHN = MHF$ (đối đỉnh) nên $NHE = MHF$ (2).	0,25
Từ (1) và (2) suy ra $FMH = ENH$ hay $AMN = ANM$. Vậy $\triangle AMN$ cân tại A.	0,25
2. Gọi I, P, Q lần lượt là hình chiếu của D trên các cạnh AB, BE, CF. Chứng minh rằng ba điểm I, P, Q cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với AO.	1,5
Tứ giác $BIPD$ nội tiếp nên $IBD + IPD = 180^\circ$ (3).	0,25
Ta có $IBD = FHA$ (cùng phụ với FAH), $FHA = QHD$ (đối đỉnh)	0,25
Suy ra $IBD = QHD$.	0,25
Vì tứ giác $DPHQ$ nội tiếp nên $QHD = QPD$ nên $IBD = QPD$ (4).	0,25
Từ (3) và (4) suy ra $QPD + IPD = 180^\circ$ nên ba điểm I, P, Q thẳng hàng.	
Ta có $PD \parallel AC$ (cùng vuông góc với BE) nên $PDB = ACB$. Qua A kẻ tiếp tuyến tAt' của (O) . Suy ra $OA \perp At$ và $tAB = ACB$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo AB).	0,25
Khi đó $PDB = tAB$. Mà $MIP = PDB$ (Tứ giác $BIPD$ nội tiếp) Suy ra $MIP = tAB$ nên $IP \parallel At$. Vậy $IP \perp AO$ (đpcm).	0,25
3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của BAC tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.	1,5
	
Vì $\triangle AMN$ cân tại A và AK là tia phân giác của góc MAN nên AK là trung trực của MN, suy ra AK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMN$. Do đó $AMK = ANK = 90^\circ \Rightarrow KM \parallel CF, KN \parallel BE$.	0,25
Gọi $R = KM \cap BH, S = KN \cap HC$. Suy ra $HRKS$ là hình bình hành hay HK đi qua trung điểm G của RS.	0,25
Từ $MR \parallel FH \Rightarrow \frac{HR}{RB} = \frac{FM}{MB}$ Vì HN là phân giác của CHE nên HM là phân giác của BHF $\Rightarrow \frac{FM}{MB} = \frac{FH}{HB}$.	0,25

	Từ $SN \parallel HE \Rightarrow \frac{HS}{SC} = \frac{EN}{NC}$. Vì HN là phân giác của CHE nên $\frac{EN}{NC} = \frac{HE}{HC}$.	0,25
	Ta có $\triangle FHB \sim \triangle EHC$ (g.g) nên $\frac{FH}{HB} = \frac{HE}{HC}$. Suy ra $\frac{HR}{RB} = \frac{HS}{SC}$ hay $RS \parallel BC$.	0,25
	Gọi J là giao điểm của HK và BC. Vì $RG \parallel BJ$ và $GS \parallel JC$ nên $\frac{RG}{BJ} = \frac{HG}{HJ} = \frac{GS}{JC}$. Mà $RG=GS$ (G là trung điểm của RS) nên $BJ=JC$ hay J là trung điểm BC. Vậy HK luôn đi qua trung điểm của BC cố định.	0,25

Ghi chú: Mọi cách giải khác đúng, thí sinh vẫn được trọn số điểm.