

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (6,5 điểm)

- a) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + x^2 - x = \sqrt{x^2 + 1}$
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2xy-1)^2 + 4x^2 = 5y^2 \\ 2x(x-y^2) = y^2 - y \end{cases}$$

Câu 2. (3,0 điểm)

- a) Tìm $x, y \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn $(x-y)^2(8-xy)+4=12(x-y)$
- b) Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng $2^n + 36$ và $12^{2n} + 25$ không đồng thời là số chính phương

Câu 3. (1,5 điểm)

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $1 \leq x, y, z \leq 3$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 7x + y + z + 9y^2 + 2z^3 - 3xz - 26xyz$

Câu 4. (7,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Tia AH cắt (O) tại K (K khác A), tia KO cắt (O) tại M (M khác K) và tia MH cắt (O) tại P (P khác M)

- a) Chứng minh $OD \parallel MH$ và 4 điểm A, O, D, P cùng nằm trên một đường tròn
- b) Gọi Q là giao điểm của PA và EF . Chứng minh $DQ \perp EF$
- c) Tia PE và tia PF cắt đường tròn (O) lần lượt là L và N (L, N khác P). Chứng minh $LC = NB$

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tập hợp A gồm 2022 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2022. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho mọi tập con gồm n phần tử của A đều chứa 3 phần tử là các số đôi một nguyên tố cùng nhau.

ĐÁP ÁN

Câu 1. (6,5 điểm)

c) **Giải phương trình** $\sqrt{x+1} + x^2 - x = \sqrt{x^2 + 1}$

Ta có : $\sqrt{x+1} + x^2 - x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + x^2 + 1 - (x+1) = \sqrt{x^2 + 1}$

Đặt $a = \sqrt{x+1}, b = \sqrt{x^2 + 1}$. Điều kiện $a \geq 0, b > 0$. Khi đó phương trình trở thành :

$$a + b^2 - a^2 = b \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b \Rightarrow x+1 = x^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1(tm) \\ x = 0(ktm) \end{cases} \\ a + b = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 + 1} = 1 (VT > 1 - ptn) \end{cases}$$

Vậy $S = \{0; 1\}$

d) **Giải hệ phương trình**
$$\begin{cases} (2xy-1)^2 + 4x^2 = 5y^2 & (1) \\ 2x(x-y^2) = y^2 - y & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (2xy-1)y = 2x^2 - y^2$$

- Nếu $y = 0 \Rightarrow 4x^2 + 1 = 0$ (vô lý), vì $4x^2 + 1 > 1 > 0$
- Nếu $y \neq 0$. Khi đó, thế $2xy - 1 = \frac{2x^2 - y^2}{y}$ vào (1), ta được

$$\left(\frac{2x^2 - y^2}{y} \right)^2 + 4x^2 = 5y^2 \quad (3). \text{ Đặt } \frac{x}{y} = t \text{ và chia hai vế của (3) cho } y^2, \text{ ta được :}$$

$$(2t^2 - 1)^2 + 4t^2 = 5 \Leftrightarrow 4t^4 - 4t^2 + 1 + 4t^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$\text{-) Nếu } t = 1 \Rightarrow x = y \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^2 = (2x^2 - 1)x \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0(ktm) \\ x = y = 1 \\ x = y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{-) Nếu } t = -1 \Rightarrow y = -x \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (2x^2 + 1)x = x^2 \Leftrightarrow x = y = 0(ktm)$$

Vậy hệ có nghiệm $(1; 1), \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Câu 2. (3,0 điểm)**c) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $(x-y)^2(8-xy)+4=12(x-y)$** Đặt $x-y=a, xy=b$ thì $a, b \in \mathbb{Z}$, ta biến đổi phương trình như sau :

$$(x-y)^2(8-xy)+4=12(x-y) \Leftrightarrow a^2(8-b)+4=12a$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{8a^2-12a+4}{a^2} = 8 - \frac{12a-4}{a^2} \in \mathbb{Z}(1) \Leftrightarrow \frac{12a-4}{a^2} \in \mathbb{Z}$$

Suy ra $a^2 \mid 12a-4 = 4(3a-1)$ mà $(3a-1; a^2) = (3a-1; a) = 1$ nên $4 \mid a^2$ Từ đây ta được $a \in \{1; -1; 2; -2\}$. Ta xét các trường hợp sau :

$$*) a = 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0; y=-1 \\ x=1; y=0 \end{cases}$$

$$*) a = -1 \Rightarrow b = 24 \Rightarrow y(y-1) = 24 \text{ (k co nghiem nguyen)}$$

$$*) a = 2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow b = 3 \Rightarrow y(y+2) = 3 \Leftrightarrow (y-1)(y+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \Rightarrow x=3 \\ y=-3 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$*) a = -2 \Rightarrow b = 15 \Rightarrow y(y-2) = 15 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 4^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y=5; x=3 \\ y=-3; x=-5 \end{cases}$$

Vậy $(x; y) \in \{(0; -1); (1; 0); (3; 1); (-1; 3); (3; 5); (-5; -3)\}$ **d) Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng $2^n + 36$ và $12^{2n} + 25$ không đồng thời là số chính phương**Giả sử tồn tại n nguyên dương sao cho $2^n + 36$ và $12^{2n} + 25$ là số chính phương

Ta lập bảng đồng dư sau :

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

Do đó ta rút ra được nhận xét : 1 số chính phương bất kỳ dư 0,1,2,4 theo modun 7

Quay trở lại bài toán, vì $2^n + 36 \equiv 2^n \pmod{3}$ nên n chẵn (vì số chính phương bất kỳ chỉ đồng dư 0,1 mod 3). Ta xét các trường hợp sau :

$$n = 3k, k = 2t \Rightarrow 12^n + 25 = 5^n + 4 = 125^k + 4 \equiv (-1)^k + 4 \equiv 5 \pmod{7}, \text{ mâu thuẫn với nhận xét}$$

Cmtt $n = 3k+1$ và $n = 3k+2$ cũng mâu thuẫn với nhận xétDo đó, điều giả sử là sai. Vậy $2^n + 36$ và $12^{2n} + 25$ không đồng thời là số chính phương với mọi n nguyên dương.

Câu 3. (1,5 điểm)

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $1 \leq x, y, z \leq 3$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 7x + y + z + 9y^2 + 2z^3 - 3xz - 26xyz$

Theo giả thiết, ta có : $1 \leq z \leq 3 \Rightarrow (z-1)^2(z-3) \leq 0$

$$\Leftrightarrow (z^2 - 2z + 1)(z-3) \leq 0 \Leftrightarrow z^3 \leq 5z^2 - 7z + 3(1)$$

Cũng theo giả thiết ta có : $(z-1)(z-3) \leq 0 \Rightarrow z^2 \leq 4z - 3$

Thế vào (1) ta được $2z^3 \leq 10(4z-3) - 14z + 6 = 26z - 24$

Từ đây kết hợp với $27 - 3x - 26xy \leq 27 - 3 - 26 = -2 < 0$, ta có :

$$\begin{aligned} 2z^3 - 3zx - 26xyz + z &\leq 26z - 24 - 3zx - 26xyz + z = z(27 - 3x - 26xy) - 24 \\ &\leq 27 - 3x - 26xy - 24 = 3 - 3x - 26xy \end{aligned}$$

Từ đây kết hợp với $4 - 26y < 4 - 26 = -22 < 0$ ta có :

$$\begin{aligned} T &\leq 7x + y + 9y^2 + 3 - 3x - 26xy = 4x + y + 9y^2 + 3 - 26xy \\ &= x(4 - 26y) + y + 9y^2 + 3 \leq 4 - 26y + y + 9y^2 + 3 = 9y^2 - 25y + 7 \end{aligned}$$

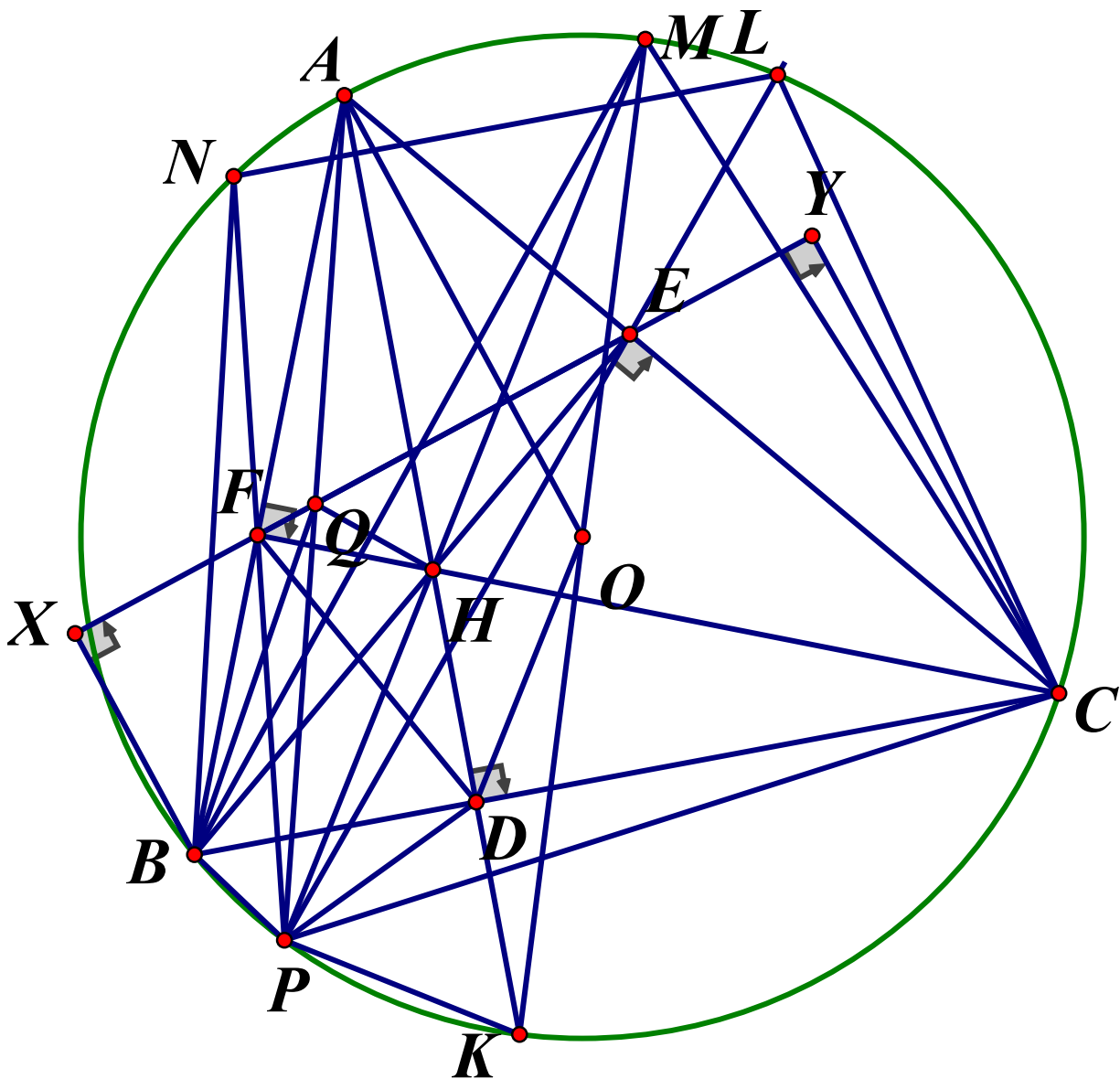
Đến đây áp dụng $y^2 \leq 4y - 3$ (vì x, y, z bình đẳng), nên ta được :

$$T \leq 9(4y - 3) - 25y + 7 = 11y - 20 \leq 11.3 - 20 = 13$$

Vậy giá trị lớn nhất của $T = 13$. Dấu bằng xảy ra khi $x = z = 1; y = 3$

Câu 4. (7,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Tia AH cắt (O) tại K (K khác A), tia KO cắt (O) tại M (M khác K) và tia MH cắt (O) tại P (P khác M)



d) Chứng minh $OD \parallel MH$ và 4 điểm A, O, D, P cùng nằm trên một đường tròn

* Ta có $\angle KBC = \angle DAC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KC)

Do $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$, mà hai đỉnh D, E là hai đỉnh kề nhau

Suy ra tứ giác $ABDE$ nội tiếp $\Rightarrow \angle EBD = \angle EAD \Rightarrow \angle HBD = \angle DAC$

Do đó $\angle HBD = \angle KBC (= \angle DAC)$

Suy ra $\triangle BHD \sim \triangle BKD (c - g - c) \Rightarrow DH = DK$, hay D là trung điểm của HK

Xét $\triangle KHM$ có O là trung điểm của KM , D là trung điểm của HK

Suy ra OD là đường trung bình của $\triangle HKM \Rightarrow OD \parallel HM$

- Vì $OD \parallel MH \Rightarrow \angle DOK = \angle PMK$ (hai góc đồng vị)

Mà $\angle PMK = \frac{1}{2} \angle POK$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn cung PK)

$\Rightarrow \angle DOK = \frac{1}{2} \angle POK$ hay OD là phân giác của $\angle POK$

$\Rightarrow \angle POD = \angle DOK$. Mà $\angle PMK = \angle PAD$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung PK)

$\Rightarrow \angle POD = \angle PAD$, mà hai đỉnh A và O là hai đỉnh kề nhau

Suy ra tứ giác $APDO$ nội tiếp, hay bốn điểm A, O, P, D cùng nằm trên một đường tròn

e) Gọi Q là giao điểm của PA và EF . Chứng minh $DQ \perp EF$

Để dàng chứng minh được tứ giác $BFEC$ nội tiếp

Suy ra $\angle AEQ = \angle ABC$. Mà $\angle ABC = \angle APC$ nên $\angle AEQ = \angle APC$. Do đó ta được :

$$\triangle AEQ \sim \triangle APC \Rightarrow \frac{AE}{AP} = \frac{AQ}{AC} \Rightarrow AP.AQ = AE.AC (1)$$

Vì $HECD$ là tứ giác nội tiếp nên $AH.AD = AE.AC (2)$

Từ (1) và (2) ta được : $AH.AD = AP.AQ$. Do đó tứ giác $PQHD$ là tứ giác nội tiếp

Ta có $\triangle AOP \sim \triangle PHD$ vì hai tam giác cân và $\angle AOP = \angle ADP = \angle PDH$. Từ đây kết hợp với $PQHD$ là tứ giác nội tiếp suy ra $\angle PQD = \angle PHD = \angle PAO$ nên $QD \parallel AO$

Vì $\angle OAC = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \angle AEF$ nên $OA \perp EF$. Mà $QD \parallel AO$ nên $QD \perp EF$

Vậy bài toán được chứng minh

f) Tia PE và tia PF cắt đường tròn (O) lần lượt là L và N (L, N khác P). Chứng minh $LC = NB$

Vì $AP.AQ = AE.AC$ theo b) và $AE.AC = AF.AB$, vì tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên tứ giác $PQEC, PQFB$ nội tiếp. Do đó ta được :

$$\angle FQB = \angle FPB = \angle NPB, \angle EQC = \angle EPC = \angle LPC (*)$$

Kẻ BX, CY vuông góc với EF . Ta có $\triangle CEY \sim \triangle ABD(g.g); \triangle BFX \sim \triangle ACD(g.g)$

Từ đây kết hợp với $CD.BC = CE.AC, BD.BC = BF.AB$ và định lý Talet trong hình thang $BXYC$ ta được các tỉ lệ thức sau :

$$\frac{CY}{AD} = \frac{CE}{AB}; \frac{BX}{AD} = \frac{BF}{AC} \Leftrightarrow \frac{CY}{BX} = \frac{CE}{BF} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{CD.BC}{BD.BC} = \frac{CD}{BD} = \frac{YQ}{XQ}$$

Mà $\angle CYQ = \angle BXQ = 90^\circ$ nên $\triangle CYQ \sim \triangle BXQ(g.g) \Rightarrow \angle EQC = \angle YQC = \angle XQB = \angle FQB(**)$

Từ (*) và (**) ta được $\angle NPB = \angle LPC$ hay $sd \hat{N}B = sd \hat{E}C \Rightarrow NB = LC$

Vậy bài toán được chứng minh

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tập hợp A gồm 2022 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2022. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho mọi tập con gồm n phần tử của A đều chứa 3 phần tử là các số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Trước hết, ta có nhận xét: Trong 6 số tự nhiên liên tiếp, nếu ít nhất 5 số được chọn ta luôn tìm được 3 số đôi một nguyên tố cùng nhau

Chứng minh: . Gọi 6 số tự nhiên liên tiếp đó là $a; a+1; \dots; a+5$

• Giả sử a chẵn, ta đặt: $a = 2k$, khi đó 6 số tự nhiên liên tiếp số là: $2k; \dots; 2k+5$. Ta xét 2 trường hợp Trường hợp 1: Nếu cả 3 số $2k+1; 2k+3; 2k+5$ đều được chọn, ta có 3 số này thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: Nếu cả 3 số này có ít nhất 1 số không được chọn, khi đó vì có ít nhất 5 số được chọn nên cả 3 số $2k; 2k+2; 2k+4$ đều số được chọn.

Và nếu cả 2 số $2k+1; 2k+3$ hoặc cả 2 số $2k+3; 2k+5$ đều được chọn thì ta lần lượt chọn các số $2k+2; 2k+4$.

Khi đó 5 số được chọn đó là: $2k; 2k+1; 2k+2; 2k+4; 2k+5$

Đến đây, trong 2 số $2k+1; 2k+5$ sẽ có ít nhất 1 số không chia hết cho 3 vì hiệu hai số này là 4 không chia hết cho 3.

Ta xét $2k+1$ chia hết cho 3. Trường hợp còn lại chứng minh tương tự. Trong trường hợp này, ta chọn 3 số: $2k+1; 2k+5; 2k+2$. Còn với $2k+5$ chia hết cho 3 thì ta lại chọn: $2k+5; 2k+4; 2k+1$.

• Trường hợp a lẻ, ta chứng minh tương tự.

Như vậy nhận xét được chứng minh.

Quay trở lại bài toán, xét $n = 1349$. Khi đó chứa 2022 số tự nhiên thành 337 nhóm: $\{1; 2; 3; \dots; 6\}, \dots, (2017; 2018; \dots; 2022)$.

Khi đó, theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một nhóm chứa ít nhất 5 phần tử được chọn và theo nhận xét trên thì tồn tại 3 số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Ta chứng minh $n \leq 1348$ không thỏa mãn. Thật vậy, ta chọn tất cả các số nhận 2 hoặc 3 làm ước.

Ta tính được có 1011 số chia hết cho 2, 674 số chia hết cho 3, 337 số chia hết cho 6. Vì vậy số số được chọn sẽ là: $1011 + 674 - 337 = 1348$. Vậy ta kết luận: $n = 1349$.