

Câu 5: (6.0 điểm). Xác định mọi hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(1+xy+f(x)) = xf(y) + x + 1, \forall x > 0, \forall y > 0.$$

Câu 6: (7.0 điểm). Cho k là một số nguyên dương và dãy (x_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} x_0 = 0, x_1 = 1 \\ x_{n+2} = kx_{n+1} + x_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương m bất kỳ, dãy (x_n) là dãy tuần hoàn theo modulo m với chu kỳ $T \leq m^2$.

b) Chứng minh rằng trong các số hạng $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ luôn tìm được ba số hạng có tích chia hết cho tích 12.9.23.

Câu 7: (7.0 điểm). Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) và có trục tâm H . Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn (I) . Gọi S, T lần lượt là trung điểm của AH, BH và gọi M là điểm đối xứng với S qua FE , gọi N là điểm đối xứng với T qua FD . Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua trục tâm của tam giác DEF .

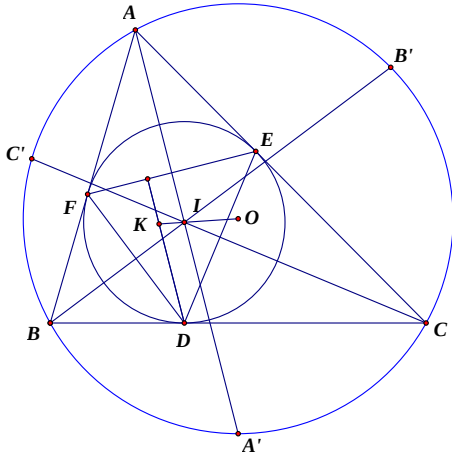
-----Hết-----

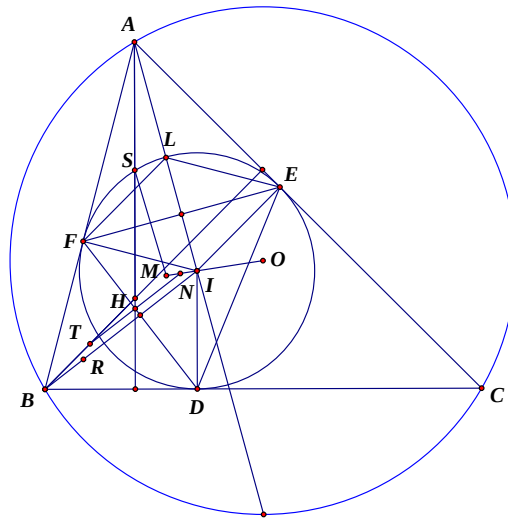
YÊU CẦU CHUNG

- * Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận lô gic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.
- * Trong mỗi bài, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu hình, nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.
- * Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,5 điểm. Đối với điểm thành phần lớn hơn 0,5 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,5 điểm.
- * Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng bài.
- * Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 5: (6.0 điểm)	Giả sử $f(x)$ là một nghiệm hàm của bài toán. Ký hiệu $P(x, y): f(1 + xy + f(x)) = xf(y) + x + 1, \forall x > 0, \forall y > 0.$ (1) Khi đó, $P(x, 1): f(1 + x + f(x)) = xf(1) + x + 1 = (1 + f(1))x + 1, \forall x > 0.$ (2)	0,5
	$P(1, 1 + x + f(x)): f(1 + 1 + x + f(x) + f(1)) = f(1 + x + f(x)) + 2 = (1 + f(1))x + 3, \forall x > 0$ (theo (2)).	1,0
	Suy ra $f(2 + f(1) + x + f(x)) = (1 + f(1))x + 3, \forall x > 0.$ (3)	0,5
	$P(x, \frac{1 + f(1) + x}{x}):$ $f(2 + f(1) + x + f(x)) = xf(\frac{1 + f(1) + x}{x}) + x + 1, \forall x > 0. \quad (4)$	1,0
	Từ (3) và (4) suy ra $f(1 + \frac{1 + f(1)}{x}) = f(1) + \frac{2}{x}, \forall x > 0.$ (5)	0,5
	Trong (5), thay x bởi $\frac{1 + f(1)}{y - 1}$ với $y > 1$ ta có $f(y) = f(1) + \frac{2}{1 + f(1)}(y - 1) \Rightarrow f(x) = ax + b, \forall x > 1.$	1,0

	Thay $f(x) = ax + b$ vào (1) ta có $f(x) = x, \forall x > 1$.	
	Với $x > 1, 0 < y \leq 1 \Rightarrow 1 + xy + f(x) = 1 + xy + x > 1$ nên $P(x, y): 1 + xy + x = xf(y) + x + 1 \Rightarrow f(y) = y, \forall y \in (0; 1]$. Suy ra $f(x) = x, \forall x > 0$.	1,0
	Thử lại vào (1) thấy thỏa mãn. Vậy $f(x) = x, \forall x > 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.	0,5
Câu 6a: (3.5 điểm)	Xét theo modulo m , ta có m^2 cặp dạng (a, b) . Do đó trong $m^2 + 1$ cặp $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{m^2}, x_{m^2+1})$ có hai cặp trùng nhau. Gọi hai cặp đó là (x_i, x_{i+1}) và (x_j, x_{j+1}) với $0 \leq i < j \leq m^2$, ta có $x_i \equiv x_j \pmod{m}, x_{i+1} \equiv x_{j+1} \pmod{m}$	1,0
	Khi đó $x_{i+2} = kx_{i+1} + x_i \equiv kx_{j+1} + x_j = x_{j+2} \pmod{m}$. Chứng minh quy nạp ta có $x_{i+n} \equiv x_{j+n} \pmod{m}, \forall n \in \mathbb{N}$.	1,0
	Ta cũng có $\forall i \geq 1, x_{i-1} = x_{i+1} - kx_i \equiv x_{j+1} - kx_j = x_{j-1} \pmod{m}$. Chứng minh quy nạp ta có $x_{i-n} \equiv x_{j-n} \pmod{m}, \forall n = \overline{0, i}$.	1,0
	Suy ra $x_n \equiv x_{n+j-i} \pmod{m}, \forall n \in \mathbb{N}$. Vậy dãy (x_n) là dãy tuần hoàn theo modulo m với chu kỳ $T = j - i \leq m^2$.	0,5
Câu 6b: (3.5 điểm)	Ta có, $12.9.23 = 4.27.23$. Theo câu a), ta có dãy (x_n) là dãy tuần hoàn theo modulo 23 với chu kỳ $1 \leq T_1 \leq 23^2 = 529 < 2023 \Rightarrow x_{T_1} \equiv x_0 = 0 \pmod{23} \Rightarrow x_{T_1} : 23$ Do đó trong dãy các số $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ tồn tại số hạng $x_{T_1} : 23$.	1,0
	Ta cũng có dãy (x_n) là dãy tuần hoàn theo modulo 27 với chu kỳ $1 \leq T_2 \leq 27^2 = 729 \Rightarrow x_{2T_2} \equiv x_{T_2} \equiv x_0 = 0 \pmod{27} \Rightarrow x_{T_2} : 27; x_{2T_2} : 27$. Vì $T_2 < 2T_2 \leq 1458 < 2023$, do đó trong dãy các số $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ tồn tại hai số hạng $x_{T_2} : 27$ và $x_{2T_2} : 27$.	1,0
	Lại có (x_n) là dãy tuần hoàn theo modulo 4 với chu kỳ $1 \leq T_3 \leq 4^2 = 16 \Rightarrow x_{3T_3} \equiv x_{2T_3} \equiv x_{T_3} \equiv x_0 = 0 \pmod{4} \Rightarrow x_{T_3} : 4; x_{2T_3} : 4; x_{3T_3} : 4$. Vì $T_3 < 2T_3 < 3T_3 \leq 48 < 2023$, do đó trong dãy các số $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ tồn tại ba số hạng là $x_{T_3} : 4; x_{2T_3} : 4$ và $x_{3T_3} : 4$.	1,0

	Từ ba tập hợp $\{T_1\}$, $\{T_2, 2T_2\}$, $\{T_3, 2T_3, 3T_3\}$, mỗi tập hợp chọn đúng một số sao cho ba số được chọn đôi một khác nhau, giả sử ba số đó là i, j, l. Ta có $(x_i.x_j.x_l):(4.27.23) \Rightarrow (x_i.x_j.x_l):(12.9.23)$. Lưu ý: Nếu học sinh không làm được câu a) nhưng sử dụng kết quả câu a) để giải câu b) thì vẫn cho điểm câu b).	0,5
Câu 7: (7.0 điểm)	Bổ đề. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) và nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn (I). Gọi K là trực tâm tam giác DEF. Khi đó ba điểm O, I, K thẳng hàng. 	0,5
	Chứng minh bổ đề: Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm thứ hai của AI, BI, CI với đường tròn (O). Khi đó ta có $B'A = B'I, C'A = C'I$ nên $B'C'$ là đường trung trực của AI. Do đó $A'I \perp B'C'$. Chứng minh tương tự ta có $B'I \perp C'A', C'I \perp A'B'$. Suy ra I là trực tâm tam giác $A'B'C'$.	1,0
	Ta có $A'B' \parallel DE, B'C' \parallel FE, C'A' \parallel FD$ nên $\Delta A'B'C'$ đồng dạng với ΔDEF. Do đó tồn tại phép vị tự biến trực tâm I và tâm đường tròn ngoại tiếp O của $\Delta A'B'C'$ thành trực tâm K và tâm đường tròn ngoại tiếp I của ΔDEF. Từ đó ta có O, I, K thẳng hàng và OI là đường thẳng Euler của ΔDEF.	1,0
	Trở lại bài toán	1,0



Gọi S, T lần lượt là trung điểm của AH, BH . Gọi L, R lần lượt là điểm đối xứng với I qua FE, FD . Ta có $IFLE$ là hình thoi. Do đó ta có $FL \parallel IE, FI \parallel LE$ suy ra $FL \perp AE, EL \perp AF$. Từ đó ta có L là trực tâm tam giác AEF .

Tam giác AEF nội tiếp đường tròn đường kính AI cho nên ta có

$$\frac{AL}{AI} = \cos FAE \quad (1)$$

1,0

Vì H là trực tâm tam giác ABC và tam giác ABC nội tiếp đường tròn đường kính $2AO$ nên ta có $\frac{AS}{AO} = \frac{\frac{1}{2}AH}{\frac{1}{2}(2AO)} = \frac{AH}{2AO} = \cos BAC \quad (2)$

1,0

Từ (1) và (2) ta có $\frac{AL}{AI} = \frac{AS}{AO} \Rightarrow \frac{AL}{AS} = \frac{AI}{AO}$.

Ta có $OAB = HAC$, do đó $OAI = SAL$. Từ đó ta có $\triangle OAI$ đồng dạng với tam giác $\triangle SAL$ suy ra $SLA = AIO$.

Lấy điểm M' trên OI sao cho $SM' \perp EF$.

Ta có $SLI = AIM'$ do đó tứ giác $ILSM'$ là hình thang cân có trục đối xứng EF . Do đó M' đối xứng với S qua EF . Do đó $M' \equiv M$ nghĩa là O, M, I thẳng hàng.

1,0

Chứng minh tương tự ta có O, N, I thẳng hàng.

Gọi K là trực tâm của tam giác DEF . Theo bổ đề ta có O, I, K thẳng hàng.

Vậy MN đi qua trực tâm K của tam giác DEF .

0,5

----- Hết -----