

Câu 1 (3,0 điểm):

- a) Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{2\sqrt{xy}}{x - y} \right) \sqrt{x} + \sqrt{y}$ với x, y là hai số thực thỏa mãn $x > y > 0$.
- b) Giải phương trình: $x + 2 \sqrt{x(x+1)} + 2 = 4 - 2\sqrt{x(x+1)} + 2$.
- c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - 3y + 3x + 2y + 12x + 8y = 0 \\ 4x + 2\sqrt{3x-2} = 3y \end{cases}$$

Câu 2 (2,0 điểm):

- a) Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 28$.
- b) Tìm tất cả số nguyên n sao cho $n^3 + 2n^2 + 7n + 7$ chia hết cho $n^2 + 3$.

Câu 3 (1,0 điểm): Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx + xyz = 4$. Chứng minh

$$xyz \leq 1 \text{ và } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Câu 4 (3,5 điểm): Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H . Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại F . Các đường thẳng FB, FC lần lượt cắt đường thẳng DE tại M, N . Gọi I là trung điểm BC .

- a) Chứng minh $ME = MB$ và MI là tia phân giác của FMN .
- b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt (O) tại K (K khác A). Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.
- c) Chứng minh các điểm F, M, N, K cùng thuộc một đường tròn.
- d) Gọi đường tròn qua các điểm F, M, N, K là (S) . Chứng minh (S) tiếp xúc với (O) .

Câu 5 (0,5 điểm): Có 6 viên bi, ban đầu được chia thành một hoặc nhiều nhóm, mỗi nhóm ít nhất 1 bi. Ta thực hiện liên tiếp các bước sau: mỗi lần lấy ở mỗi nhóm 1 bi và lập thành một nhóm mới.

Ví dụ: Nếu ban đầu ta có hai nhóm với số bi là 5, 1 thì sau bước chuyển, nhóm 5 bi còn lại 4 bi, nhóm 1 bi không còn bi nào, và một nhóm mới được lập với 2 bi. Như vậy, sau bước chuyển ta được 2 nhóm mới có số bi lần lượt là 2, 4.

Chứng minh sau một số bước chia nhóm như trên, ta luôn chia được các bi đã cho thành ba nhóm với số bi trong mỗi nhóm lần lượt là 1, 2, 3.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh:..... Họ tên, chữ ký GT 1

Số báo danh: Họ tên, chữ ký GT 2

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN THI : TOÁN (chuyên)

(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- 1) Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
- 2) Việc chi tiết hoá (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không làm sai lệch hướng dẫn chấm.
- 3) Điểm toàn bài không làm tròn.

II. HƯỚNG DẪN CỤ THỂ

Câu 1 (3,0 điểm):

- a) Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{2\sqrt{xy}}{x - y} \right) \sqrt{x} + \sqrt{y}$ với x, y là hai số thực thỏa mãn $x > y > 0$.
- b) Giải phương trình: $x + 2\sqrt{x^2 + x + 2} = 4 - 2\sqrt{x^2 + x + 2}$.
- c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - 3y + 3x + 2y + 12x + 8y = 0 \\ 4x + 2\sqrt{3x - 2} = 3y \end{cases}.$$

Câu 1	Nội dung	Điểm
1.a) 1,0đ	$P = \frac{\sqrt{x} \sqrt{x + \sqrt{y}} - \sqrt{y} \sqrt{x - \sqrt{y}} - 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x + \sqrt{y}} \sqrt{x - \sqrt{y}}} \sqrt{x} + \sqrt{y}$	0,25x2
	$P = \frac{x + y - 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$	0,25
	$P = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$	0,25
1.b) 1,0đ	Phương trình $\Leftrightarrow x^2 + x - 6 + 2\sqrt{x^2 + x + 2} = 0 \quad (*)$	0,25x2
	Đặt $t = \sqrt{x^2 + x + 2} \quad t \geq 0$. Phương trình (*) trở thành $t^2 + 2t - 8 = 0$.	
	Giải phương trình ta được $t = 2$ (nhận) hoặc $t = -4$ (loại).	0,25
	Với $t = 2$, ta có: $\sqrt{x^2 + x + 2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$.	0,25
1.c) 1,0đ	$\begin{cases} 2x - 3y + 3x + 2y + 12x + 8y = 0 & (1) \\ 4x + 2\sqrt{3x - 2} = 3y & (2) \end{cases}.$ Điều kiện: $x \geq \frac{2}{3}$.	0,25

	$(1) \Leftrightarrow 2x - 3y + 4 \quad 3x + 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2x+4}{3} \\ y = -\frac{3x}{2} \end{cases}.$	
	Với $y = \frac{2x+4}{3}$, thay vào (2) ta được: $4x + 2\sqrt{3x-2} = 2x + 4 \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = -x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 3x - 2 = (-x + 2)^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - 7x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 1 \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$ Hệ có nghiệm $x; y = 1; 2$.	0,5
	Với $y = -\frac{3x}{2}$, thay vào (2) ta được: $4x + 2\sqrt{3x-2} + \frac{9x}{2} = 0$ vô nghiệm, do vế trái luôn dương với mọi $x \geq \frac{2}{3}$.	0,25

Câu 2 (2,0 điểm):

a) Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 28$.

b) Tìm tất cả số nguyên n sao cho $n^3 + 2n^2 + 7n + 7$ chia hết cho $n^2 + 3$.

Câu 2	Nội dung	Điểm
2.a) 1,0đ	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m < 4$.	0,25
	Theo Vi – ét: $x_1 + x_2 = 4, x_1 x_2 = m$.	0,25
	$x_1^3 + x_2^3 = 28 \Leftrightarrow x_1 + x_2 \left[x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 x_2 \right] = 28$	0,25
	$\Leftrightarrow 4 \cdot 16 - 3m = 28 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa mãn).	0,25
2.b) 1,0đ	Ta có $n^3 + 2n^2 + 7n + 7 = n^2 + 3 \cdot n + 2 + 4n + 1$.	0,25
	Suy ra $4n + 1$ chia hết cho $n^2 + 3$.	
	Lại có $4n + 1 \cdot 4n - 1 = 16n^2 - 1 = 16(n^2 + 3) - 49$.	0,25
	Suy ra 49 chia hết cho $n^2 + 3$.	
	Do $n^2 + 3 \geq 3$ nên ta được $\begin{cases} n^2 + 3 = 7 \\ n^2 + 3 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \\ n = 2 \\ n^2 = 46 \text{ vn} \end{cases}.$	0,5
	Thử lại ta được $n = -2$ là số thỏa mãn đề bài.	

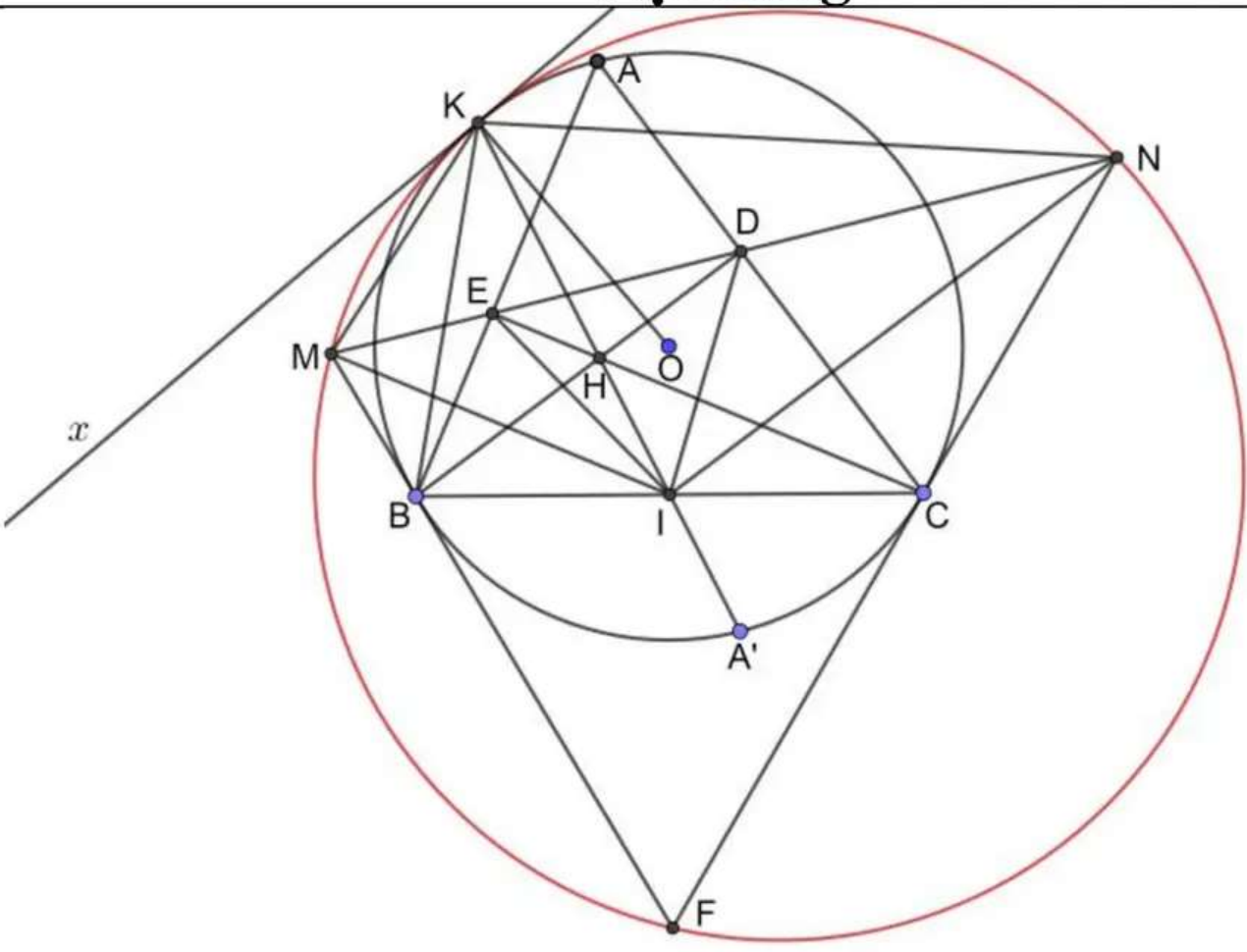
Câu 3 (1,0 điểm): Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx + xyz = 4$. Chứng minh

$$xyz \leq 1 \text{ và } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Câu 3	Nội dung	Điểm
1,0đ	Ta có $4 = xy + yz + zx + xyz \geq 3\sqrt[3]{xyz^2} + xyz$.	0,25
	Đặt $t = \sqrt[3]{xyz}$ $t > 0$, ta được $t^3 + 3t^2 \leq 4 \Leftrightarrow t - 1 \quad t + 2^2 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$. Do đó $xyz \leq 1$.	0,25
	Ba số x, y, z không thể cùng lớn hơn 1 hoặc cùng nhỏ hơn 1. Không giảm tính tổng quát, giả sử $x \geq 1 \geq y$. Ta chứng minh: $x + y + z \geq xy + yz + zx$ (*).	0,25
	Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow x + y + z + xyz \geq 4 \Leftrightarrow x + y + 1 + xy \frac{4 - xy}{x + y + xy} \geq 4$	
	$\Leftrightarrow x + y^2 + xy \frac{x + y - x^2 y^2 + 3xy + 4}{x + y + 4xy} \geq 4$ $\Leftrightarrow x + y - 2^2 + xy \frac{x - 1}{1 - y} \geq 0$ (luôn đúng do $x \geq 1 \geq y$).	
	Khi đó $\frac{x}{y + z} + \frac{y}{z + x} + \frac{z}{x + y} = \frac{x^2}{x(y + z)} + \frac{y^2}{y(z + x)} + \frac{z^2}{z(x + y)}$ $\geq \frac{x + y + z^2}{2(xy + yz + zx)} \geq \frac{x + y + z}{2}$.	0,25

Câu 4 (3,5 điểm): Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H . Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại F . Các đường thẳng FB, FC lần lượt cắt đường thẳng DE tại M, N . Gọi I là trung điểm BC .

- Chứng minh $ME = MB$ và MI là tia phân giác của FMN .
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt (O) tại K (K khác A). Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.
- Chứng minh các điểm F, M, N, K cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi đường tròn qua các điểm F, M, N, K là (S) . Chứng minh (S) tiếp xúc với (O) .

Câu 4	Nội dung	Điểm
		
4.a) 1,0đ	$BEC = BDC = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BCDE$ nội tiếp.	0,25
	Do đó $MEB = BCD$.	0,25
	Mà $MBE = BCD$ nên $MEB = MBE$.	0,25

	Tam giác MBE cân tại M nên $MB = ME$.	
	Lại có tam giác BCE vuông tại E , trung tuyến EI nên $IB = IE$.	
	Suy ra MI là trung trực đoạn BE . Vậy MI là tia phân giác của FMN .	0,25

4.b) 1,0đ	Kẻ đường kính AA' của (O) . Ta có $BH \parallel CA'$ (cùng vuông góc AC) và $CH \parallel BA'$ (cùng vuông góc AB) nên $BHCA'$ là hình bình hành. Suy ra H, I, A' thẳng hàng.	0,25
	Ta có: $ADH = AEH = 90^\circ$ suy ra tam giác ADE nội tiếp đường tròn đường kính AH .	0,25
	Lại có $HKA = A'KA = 90^\circ$ nên K, H, A' thẳng hàng.	0,25
	Do đó H, I, K thẳng hàng.	0,25
4.c) 1,0đ	$BKI = BKA - HKA = 180^\circ - BCA - 90^\circ = 90^\circ - BCA$ $= 90^\circ - MBA = BMI$. Do đó tứ giác $BMKI$ nội tiếp.	0,5
	Tương tự ta được tứ giác $CNKI$ nội tiếp.	0,25
	Do đó $BMK = KIC$. Mà $KIC + KNC = 180^\circ$ nên $BMK + KNC = 180^\circ$. Vậy các điểm F, M, N, K cùng thuộc một đường tròn.	0,25
4.d) 0,5đ	Kẻ tia tiếp tuyến Kx của (O) . Ta có: $xKM = xKB - MKB = KCB - MIB = KNI - MIB$.	0,25
	Do $MIN = CNI = FCI - CIN = BAC - 90^\circ - ACB$ $= BAC + ACB - 90^\circ = 90^\circ - ABC = MIB$ nên $KNI - MIB = KNI - MIB = KNI - MIB$. Suy ra Kx là tiếp tuyến của (S) . Vậy (S) tiếp xúc với (O) .	0,25

Câu 5 (0,5 điểm): Có 6 viên bi, ban đầu được chia thành một hoặc nhiều nhóm, mỗi nhóm ít nhất 1 bi. Ta thực hiện liên tiếp các bước sau: mỗi lần lấy ở mỗi nhóm 1 bi và lập thành một nhóm mới.

Ví dụ: Nếu ban đầu ta có hai nhóm với số bi là 5,1 thì sau bước chuyển, nhóm 5 bi còn lại 4 bi, nhóm 1 bi không còn bi nào, và một nhóm mới được lập với 2 bi. Như vậy, sau bước chuyển ta được 2 nhóm mới có số bi lần lượt là 2,4.

Chứng minh sau một số bước chia nhóm như trên, ta luôn chia được các bi đã cho thành ba nhóm với số bi trong mỗi nhóm lần lượt là 1,2,3.

Câu 5	Nội dung	Điểm
0,5đ	Tất cả cách viết 6 thành tổng của một hoặc nhiều số nguyên dương là: $6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 2 + 1 = 1 + 1 + 4 = 1 + 1 + 1 + 3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2$ $= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2 = 3 + 3$.	0,25
	Ta có sơ đồ sau: $ \begin{array}{ccccccc} [2,1,1,1,1] & & [2,2,1,1] & \rightarrow & [4,1,1] & \rightarrow & [3,3] \\ \downarrow & & & & & & \downarrow \\ [1,1,1,1,1,1] & \rightarrow & [6] & \rightarrow & [5,1] & \rightarrow & [4,2] \leftarrow [3,1,1,1] \leftarrow [2,2,2] \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & [3,1,2] \end{array} $	0,25

	Nên sau một số bước ta sẽ thu được 3 nhóm và số bi ở mỗi nhóm là 1,2,3.	
--	---	--

----- **HẾT** -----