

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA
THANH HÓA

NĂM HỌC 2021- 2022

MÔN THI: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Số báo danh

.....

Thời gian: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Ngày thi thứ nhất: 27/9/2021

(Đề thi có 4 bài, gồm 01 trang)

Bài 1 (5,0 điểm).

1) Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 3, a_2 = 7$ và $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i a_{i+1}}$.

2) Cho dãy số $(u_n): u_1 = 2, u_n = 3u_{n-1} + 2n^3 - 9n^2 + 9n - 3, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố lẻ p thì $\sum_{i=1}^{p-1} u_i$ chia hết cho p .

Bài 2 (5,0 điểm). Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(y+1).f(x) + f(x.f(y) + f(x+y)) = y \quad \text{với } \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3 (5,0 điểm). Cho tam giác nhọn không cân ABC có trung tuyến AM và các đường cao BB_1, CC_1 ($B_1 \in AC, C_1 \in AB$). Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt các đường thẳng BB_1, CC_1 lần lượt tại E và F . Gọi (k) là đường tròn ngoại tiếp tam giác EFM . Giả sử $(k_1), (k_2)$ là các đường tròn tiếp xúc với đường thẳng EF đồng thời tiếp xúc với cung EF không chứa M của đường tròn (k) .

1) Chứng minh rằng $AE = AF$.

2) Chứng minh rằng nếu (k_1) cắt (k_2) tại P và Q thì P, M, Q thẳng hàng.

Bài 4 (5,0 điểm). Xét dãy số gồm 2021 số tự nhiên liên tiếp $1; 2; 3; \dots; 2021$.

1) Mỗi lần lấy ra hai số kề nhau bất kỳ của dãy rồi xếp chúng vào các vị trí vừa lấy nhưng theo chiều ngược lại. Hỏi sau một số lần thực hiện liên tiếp như vậy, ta có thể nhận được dãy viết theo chiều ngược lại $2021; 2020; \dots; 3; 2; 1$ hay không?

2) Mỗi lần lấy ra 10 số hạng bất kỳ của dãy rồi xếp chúng vào vị trí vừa lấy nhưng theo chiều ngược lại. Hỏi sau một số lần thực hiện liên tiếp như vậy, ta có thể nhận được dãy $1; 2; 3; \dots; 2021$ như ban đầu hay không?

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:

Ghi chú: Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay khi làm bài

ĐỀ CHÍNH THỨC

Số báo danh

.....

Thời gian: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Ngày thi thứ hai: 28/9/2021

(Đề thi có 3 bài, gồm 01 trang)

Bài 5 (6,0 điểm). Giả sử $P(x)$ là một đa thức hệ số thực thỏa mãn tính chất: với mọi số thực x, y thì $|y^2 - P(x)| \leq 2|x|$ khi và chỉ khi $|x^2 - P(y)| \leq 2|y|$.

Chứng minh rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $P(x) = 0$.

Bài 6 (7,0 điểm). Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3, n là số nguyên dương sao cho các số $p-1, p, n, n+1$ từng đôi một không có ước số chung lớn hơn 2. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^{p-1} + x^{p-1} + \dots + x + 2 = y^{n+1}$.

Bài 7 (7,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE và CF của tam giác cắt nhau tại H ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$). Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K ($K \neq A$); AM cắt đường tròn (J) tại điểm thứ hai là Q ($Q \neq A$).

1) Chứng minh các đường thẳng KF, EQ và BC đồng quy.

2) Gọi U là trung điểm của đoạn AM , P là điểm di động trên cung nhỏ AC của (O) . X là hình chiếu vuông góc của M trên AP . Gọi I là trung điểm của PX . Đường thẳng KI cắt (O) tại S ($S \neq K$). Lấy điểm T thuộc đường thẳng KX sao cho IT vuông góc với UI . Chứng minh ST luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển trên cung nhỏ AC của (O) .

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:.....

Ghi chú: Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay khi làm bài.