

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
GIA LAI

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG (BẢNG A)
NĂM HỌC 2022-2023

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC MÔN TOÁN

Bài 1 (5 điểm). Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng,

$$\frac{ab}{a^2 + ab + bc} + \frac{bc}{b^2 + bc + ca} + \frac{ca}{c^2 + ca + ab} \leq 1.$$

Lời giải.

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky - Cauchy - Shwartz ta có

$$(a^2 + ab + bc)(c^2 + ab + bc) \geq (ac + ab + bc)^2$$

..... 3 điểm

$$\Rightarrow \frac{ab}{a^2 + ab + bc} = \frac{ab(c^2 + ab + bc)}{(a^2 + ab + bc)(c^2 + ab + bc)} \leq \frac{ab(c^2 + ab + bc)}{(ac + ab + bc)^2}.$$

..... 1 điểm

Tạo thêm hai bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại ta sẽ có bất đẳng thức cần chứng minh.

..... 1 điểm

□

Bài 2 (3 điểm). Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (a, b, c) sao cho với mọi số nguyên dương n không có ước nguyên tố nhỏ hơn 2022 ta luôn có $a^n + b^n + n$ chia hết cho $n + c$.

Lời giải.

Giả sử (a, b, c) là một bộ số thỏa yêu cầu bài toán. Gọi S là tích tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn 2022. Khi đó, mọi số nguyên dương n thỏa

$$n \equiv \pm 1 \pmod{S}$$

ta đều có

$$n + c \mid a^n + b^n + n \Rightarrow n + c \mid a^n + b^n - c.$$

..... 0,5 điểm

Xét p là số nguyên tố "đủ lớn" nào đó. Lúc này

$$(p, (p-1)S) = 1$$

nên theo định lý thặng dư Trung Hoa ta có thể tìm được số nguyên dương n sao cho

$$\begin{cases} n \equiv -c \pmod{p} \\ n \equiv 1 \pmod{(p-1)S} \end{cases}.$$

Vì

$$\begin{cases} n + c \equiv 0 \pmod{p} \\ n \equiv 1 \pmod{S} \end{cases}$$

nên

$$p \mid n + c \mid a^n + b^n - c$$

Lại vì $n \equiv 1 \pmod{p-1}$ nên theo định lý Fermat thì

$$a^n + b^n - c \equiv a + b - c \pmod{p}$$

Và như vậy ta suy ra được

$$p \mid a + b - c$$

Trong khi p ta có thể chọn lớn tùy ý nên suy ra $a + b - c = 0$.

..... 1 điểm

Lý luận tương tự, ta chọn được số n sao cho

$$\begin{cases} n \equiv -c \pmod{p} \\ n \equiv -1 \pmod{(p-1)S} \end{cases}.$$

Vì

$$\begin{cases} n + c \equiv 0 \pmod{p} \\ n \equiv -1 \pmod{S} \end{cases}$$

nên

$$p \mid n + c \mid a^n + b^n - c$$

Cũng lại vì

$$n + 1 \equiv 0 \pmod{(p-1)}$$

nên theo định lý Fermat thì

$$p \mid a^n + b^n - c \Rightarrow p \mid a^{n+1}b + b^{n+1}a - abc \Rightarrow p \mid a + b - abc.$$

Cũng vì p lớn tùy ý nên suy ra $a + b - abc = 0$.

..... 1 điểm

Qua các lý luận trên ta suy ra được

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ a + b - abc = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Thử lại thấy thỏa.

Vậy chỉ có một bộ số tìm được là $(a, b, c) = (1, 1, 2)$.

..... 0,5 điểm

□

Bài 3 (3 điểm). Cho hàm số $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ liên tục và thỏa mãn $f(f(x)) = x^4, \forall x \in [0; 1]$.

Chứng minh rằng,

$$x^4 < f(x) < x, \forall x \in (0; 1).$$

Lời giải.

Trước tiên ta chứng minh f là một đơn ánh. Thật vậy, giả sử rằng

$$x_1, x_2 \in [0; 1] : f(x_1) = f(x_2)$$

Khi đó,

$$f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow x_1^4 = x_2^4 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

..... 0,5 điểm

Tiếp theo ta sẽ chứng minh f đơn điệu. Thật vậy, giả sử trái lại rằng f không đơn điệu. Khi đó tồn tại số $x_0 \in (0; 1)$ là điểm cực trị của f . Ta xét đó là điểm cực tiểu. Trường hợp là điểm cực đại được lý luận tương tự.

Vì x_0 là điểm cực tiểu của f nên tồn tại số dương ϵ sao cho

$$f(x) > f(x_0), \forall x \in [x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon] \setminus \{x_0\}$$

Vì f liên tục nên ta tìm được hai số c, d thỏa mãn

$$x_0 - \epsilon \leq c < x_0 < d \leq x_0 + \epsilon : f(c) = f(d).$$

Điều này mâu thuẫn với tính đơn ánh của f .

..... 0,5 điểm

Nếu

$$\exists x_0 \in (0; 1) : f(x_0) = x_0$$

thì

$$f(f(x_0)) = f(x_0) \Rightarrow x_0^4 = x_0$$

đó là điều không thể xảy ra. Vậy

$$f(x) \neq x, \forall x \in (0; 1).$$

..... 0,5 điểm

Lại vì f liên tục nên ta suy ra

$$\begin{cases} f(x) > x, \forall x \in (0; 1) \\ f(x) < x, \forall x \in (0; 1) \end{cases}.$$

..... 0,5 điểm

Xét số x sao cho $0 < x < 1$ và $0 < f(x) < 1$ ta có

$$f(x^4) = f(f(f(x))) = [f(x)]^4.$$

Quy nạp lên ta được

$$f(x^{4^k}) = [f(x)]^{4^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Do f liên tục, cho $k \rightarrow +\infty$ ta suy ra được $f(0) = 0$. Ta có

$$\begin{cases} f(1) = [f(1)]^4 \\ f(1) \neq f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 1.$$

Như vậy f đơn điệu tăng.

Nếu

$$f(x) > x, \quad \forall x \in (0;1) \Rightarrow f(f(x)) > f(x), \quad \forall x \in (0;1) \Rightarrow x^4 > x, \quad \forall x \in (0;1)$$

là điều không thể xảy ra. Vậy $f(x) < x, \quad \forall x \in (0;1)$.

Do đó

$$\begin{aligned} f(f(x)) &< f(x), \quad \forall x \in (0;1) \\ \Rightarrow x^4 &< f(x) < x, \quad \forall x \in (0;1) \end{aligned}$$

..... 1 điểm

□

Bài 4 (5 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , P là một điểm thay đổi trên cung nhỏ AC của (O) và K là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC .

- Chứng minh rằng, đường thẳng qua K vuông góc với PA luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.
- Gọi H là hình chiếu của K lên PA . Chứng minh rằng, đường trung trực của đoạn AH luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Bài 5 (4 điểm). Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; \dots; 2022\}$. Đặt

$$F = \{X \mid X \subset A \text{ và } S(X) \text{ chia hết cho } 3\}$$

với $S(X)$ là tổng các phần tử của X .

a) Tìm số phần tử của tập F có chứa 2022.

b) Hãy tính $\sum_{X \in F} S(X)$.

Lời giải.

Trong lời giải này ta qui ước $S(\emptyset) = 0$.

a) Đặt $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

Gọi $x_j, j = 0, 1, 2$ là số tập con B của $A_1 = \{1; 2; \dots; 2021\}$ sao cho $S(B) \equiv j \pmod{3}$.

Vì 2022 chia hết cho 3 nên đáp số của câu này là x_0 .

Ta có

$$x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 = \sum_{B \subset A_1} \varepsilon^{S(B)}.$$

Trong khi đó ta biết rằng

$$\sum_{X \subset \{x_1; x_2; \dots; x_n\}} x^{S(X)} = (1 + x^{x_1}) (1 + x^{x_2}) \dots (1 + x^{x_n})$$

nên

$$x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 = (1 + \varepsilon) (1 + \varepsilon^2) \dots (1 + \varepsilon^{2021}).$$

..... 0,5 điểm

Ta có

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x - \varepsilon) (x - \varepsilon^2) (x - \varepsilon^3) \\ \Rightarrow (-1)^3 - 1 &= (-1 - \varepsilon) (-1 - \varepsilon^2) (-1 - \varepsilon^3) \\ \Rightarrow 2 &= (1 + \varepsilon) (1 + \varepsilon^2) (1 + \varepsilon^3). \end{aligned}$$

..... 0,5 điểm

Do đó

$$x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 = \frac{(1 + \varepsilon) (1 + \varepsilon^2) \dots (1 + \varepsilon^{2022})}{1 + \varepsilon^{2022}} = \frac{2^{674}}{2} = 2^{673}.$$

hay

$$(x_0 - 2^{673}) + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 = 0.$$

Suy ra

$$x_0 - 2^{673} = x_1 = x_2$$

..... 0,5 điểm

Ta có biến đổi tiếp

$$\begin{aligned}x_0 - 2^{673} &= x_1 = x_2 \\ \Rightarrow x_0 - 2^{673} &= \frac{1}{3} (x_0 + x_1 + x_2 - 2^{673}) \\ \Rightarrow x_0 - 2^{673} &= \frac{1}{3} (2^{2021} - 2^{673}).\end{aligned}$$

Vậy đáp số cho câu này là $x_0 = \frac{2^{2021} + 2^{674}}{3}$.

..... 0,5 điểm

b) Đặt $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

Xét một số $k \in A$ bất kỳ. Gọi $x_j, j = 0, 1, 2$ là số tập con B của $A \setminus \{k\}$ mà tổng các phần tử của nó $S(B) \equiv j \pmod{3}$. Khi đó thì

$$x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 = \sum_{B \subset A \setminus \{k\}} \varepsilon^{S(B)}.$$

Trong khi đó ta biết rằng

$$\sum_{X \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\}} x^{S(X)} = (1 + x^{x_1}) (1 + x^{x_2}) \cdots (1 + x^{x_n})$$

nên

$$x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 = \sum_{B \subset A \setminus \{k\}} \varepsilon^{S(B)} = \frac{(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2) \cdots (1 + \varepsilon^{2022})}{1 + \varepsilon^k}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}x^3 - 1 &= (x - \varepsilon)(x - \varepsilon^2)(x - \varepsilon^3) \\ \Rightarrow (-1)^3 - 1 &= (-1 - \varepsilon)(-1 - \varepsilon^2)(-1 - \varepsilon^3) \\ \Rightarrow 2 &= (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon^3).\end{aligned}$$

Do đó

$$x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 = \sum_{B \subset A \setminus \{k\}} \varepsilon^{S(B)} = \frac{(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2) \cdots (1 + \varepsilon^{2022})}{1 + \varepsilon^k} = \frac{2^{674}}{1 + \varepsilon^k}.$$

..... 0,5 điểm

Có 3 loại số k như sau:

- **Trường hợp 1:** $k \equiv 0 \pmod{3}$. (Trường hợp này ta cần tìm x_0).

Ta có

$$\begin{aligned}
 x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 &= \frac{2^{674}}{1 + \varepsilon^k} = 2^{673} \\
 \Rightarrow x_0 - 2^{673} + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 &= 0 \\
 \Rightarrow x_0 - 2^{673} &= x_1 = x_2 \\
 \Rightarrow x_0 - 2^{673} &= \frac{1}{3} (x_0 + x_1 + x_2 - 2^{673}) \\
 \Rightarrow x_0 - 2^{673} &= \frac{1}{3} (2^{2021} - 2^{673}).
 \end{aligned}$$

Do đó $x_0 = \frac{2^{2021} + 2^{674}}{3}$.

- **Trường hợp 2:** $k \equiv 1 \pmod{3}$. (Lúc này thì cần tính x_2).

Ta có

$$\begin{aligned}
 x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 &= \frac{2^{674}}{1 + \varepsilon} \\
 \Rightarrow x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + x_0\varepsilon + x_1\varepsilon^2 + x_2 &= 2^{674} \\
 \Rightarrow x_0 + x_2 - 2^{674} + (x_0 + x_1)\varepsilon + (x_1 + x_2)\varepsilon^2 &= 0.
 \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
 x_0 + x_2 - 2^{674} &= x_0 + x_1 = x_1 + x_2 = \frac{1}{3} (2(x_0 + x_1 + x_2) - 2^{674}) \\
 &= \frac{1}{3} (2 \cdot 2^{2021} - 2^{674}) = \frac{1}{3} (2^{2022} - 2^{674}).
 \end{aligned}$$

Suy ra $x_2 = 2^{2021} - (x_0 + x_1) = \frac{2^{2021} + 2^{674}}{3}$.

- **Trường hợp 3:** $k \equiv 2 \pmod{3}$. (Trong trường hợp này lại cần xác định x_1).

Ta có

$$\begin{aligned}
 x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 &= \frac{2^{674}}{1 + \varepsilon^2} \\
 \Rightarrow x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + x_0\varepsilon^2 + x_1 + x_2\varepsilon &= 2^{674} \\
 \Rightarrow x_0 + x_1 - 2^{674} + (x_1 + x_2)\varepsilon + (x_0 + x_2)\varepsilon^2 &= 0.
 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
 x_0 + x_1 - 2^{674} &= x_1 + x_2 = x_0 + x_2 = \frac{1}{3} (2(x_0 + x_1 + x_2) - 2^{674}) \\
 &= \frac{1}{3} (2 \cdot 2^{2021} - 2^{674}) = \frac{1}{3} (2^{2022} - 2^{674}).
 \end{aligned}$$

Do đó $x_1 = 2^{674} - (x_0 + x_2) = \frac{2^{2021} + 2^{674}}{3}$.

..... 1 điểm
 Qua đây ta nhận thấy rằng, với mỗi số k trong A , luôn có đúng $\frac{2^{2021} + 2^{674}}{3}$ phần tử

của F chứa nó. Vậy nên

$$\begin{aligned}\sum_{X \in F} S(X) &= \left(\frac{2^{2021} + 2^{674}}{3} \right) (1 + 2 + \dots + 2022) \\ &= \left(\frac{2^{2021} + 2^{674}}{3} \right) \cdot \frac{2022 \cdot 2023}{2} \\ &= (2^{2021} + 2^{674}) \cdot 337 \cdot 2023.\end{aligned}$$

..... 0,5 điểm

□

Lưu ý

1. Giám khảo chấm đúng như đáp án, biểu điểm.
2. Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng, giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của hướng dẫn chấm.
3. Giám khảo không qui tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

—————Hết—————