

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Bài 1. (3,0 điểm)

1. Rút gọn các biểu thức

$$M = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{16}}$$

$$N = \frac{2(\sqrt{3}-1)\sqrt{6\sqrt{3}+10}}{(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{3+\sqrt{5}}}$$

2. Giải phương trình $(1+3x\sqrt{9x^2+1})(\sqrt{9x^2+1}-3x)=1$

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + xy + 1 = 4x \\ x^3 + x^2y + y = 3x \end{cases}$

Bài 2. (3,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = ax^2$ qua $M(\sqrt{3}; 3)$ và đường

thẳng $(d): y = -\frac{1}{2}x + m$ (với m là tham số). Xác định phương trình của parabol

(P) , từ đó tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ khác gốc tọa độ, sao cho $\frac{y_A}{x_B} + \frac{y_B}{x_A} = \frac{25}{16}$

2. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ và x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + nx + 1 = 0$, với m, n là các tham số thỏa mãn $|m| \geq 2, |n| \geq 2$. Chứng minh rằng $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = n^2 - m^2$

3. Cho hai số x, y liên hệ với nhau bởi đẳng thức $x^2 + 2y^2 - 2xy + 10(x - y) + 21 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x - y + 2$

Bài 3. (1,0 điểm) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $y = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , có ba đường cao AD, BE, CF ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$) cắt nhau tại H . Tia AO cắt BC tại M và cắt (O) tại N , gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của M trên AB, AC . Chứng minh :

1) DH là tia phân giác của $\angle EDF$

2) $\frac{HE}{HF} = \frac{NB}{NC}$

3) $HE.MQ.HB = HF.MP.NC$

ĐÁP ÁN

Bài 1. (3,0 điểm)

1. Rút gọn các biểu thức

$$M = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{16}}$$

$$M = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{16} - \sqrt{15} = \sqrt{16} - 1 = 3$$

$$N = \frac{2(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}}{(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{3+\sqrt{5}}} = \frac{2(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}}{(\sqrt{5}-1)\sqrt{6+2\sqrt{5}}} = \frac{2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{4}{4} = 1$$

2. Giải phương trình $(1+3x\sqrt{9x^2+1})(\sqrt{9x^2+1}-3x)=1$

$$\frac{1+3x\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{9x^2+1}-3x} = 1 \Leftrightarrow 1+3x\sqrt{9x^2+1} = \sqrt{9x^2+1}-3x$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(\sqrt{9x^2+1}-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \\ 9x^2+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ x=0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{\frac{1}{3}; 0\right\}$$

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + xy + 1 = 4x \\ x^3 + x^2y + y = 3x \end{cases}$

Ta có $(0; y)$ không là nghiệm của hệ nên :

$$\begin{cases} 2x + y + \frac{1}{x} = 4 \\ x^2 + xy + \frac{y}{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y) + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 4 \\ (x+y)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x + \frac{1}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ có tập nghiệm $(x; y) = (1; 1)$

Bài 2. (3,0 điểm)

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = ax^2$ qua $M(\sqrt{3}; 3)$ và

đường thẳng $(d): y = -\frac{1}{2}x + m$ (với m là tham số). Xác định phương trình của parabol (P) , từ đó tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ khác gốc tọa độ, sao cho $\frac{y_A}{x_B} + \frac{y_B}{x_A} = \frac{25}{16}$

$$M(\sqrt{3}; 3) \in (P): y = ax^2 \Leftrightarrow 3 = a(\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow a = 1. \text{ Vậy parabol } (P): y = x^2$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $x^2 = -\frac{1}{2}x + m$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 2m = 0 \text{ có } \Delta = 1 + 16m$$

Để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$

khác gốc tọa độ $\Leftrightarrow m > -\frac{1}{16}, m \neq 0$. Theo định lý Vi-et, ta có :

$$x_A + x_B = -\frac{1}{2}; x_A x_B = -m$$

$$\frac{y_A}{x_B} + \frac{y_B}{x_A} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \frac{x_A^2}{x_B} + \frac{x_B^2}{x_A} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \frac{x_A^2 + x_B^2}{x_A x_B} = \frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_A + x_B)^3 - 3x_A x_B (x_A + x_B)}{x_A x_B} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3(-m)\left(-\frac{1}{2}\right)}{-m} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow m = 2(tm)$$

5. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ và x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + nx + 1 = 0$, với m, n là các tham số thỏa mãn $|m| \geq 2, |n| \geq 2$. Chứng minh rằng $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = n^2 - m^2$

Theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_3 + x_4 = -n \\ x_3 x_4 = 1 \end{cases}$ Ta có :

$$\begin{aligned} VT &= (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = n^2 - m^2 \\ &= [x_1 x_2 - x_3(x_1 + x_2) + x_2^3][x_1 x_2 + x_4(x_1 + x_2) + x_4^2] \\ &= (1 + mx_3 + x_3^2)(1 - mx_4 + x_4^2) = (mx_3 - nx_3)(-mx_4 - nx_4) \\ &= (n - m)x_3(m + n)x_4 = n^2 - m^2 = VP \end{aligned}$$

6. Cho hai số x, y liên hệ với nhau bởi đẳng thức $x^2 + 2y^2 - 2xy + 10(x - y) + 21 = 0$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x - y + 2$

Viết lại biểu thức đã cho thành $(x - y + 2)^2 + 6(x - y + 2) + 5 = -y^2$

Như vậy với mọi x và mọi y ta luôn có $S^2 + 6S + 5 \leq 0$ (với $S = x - y + 2$)

Suy ra $(S + 5)(S + 1) \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq S \leq -1$. Do đó :

$$\text{Min } S = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 0 \end{cases}; \text{Max } S = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Bài 3. (1,0 điểm) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $y = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$

$$\text{Ta có : } y = \frac{2x-1}{x^2-x+1} \Leftrightarrow yx^2 - (y+2)x + y+1 = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} (ktm)$$

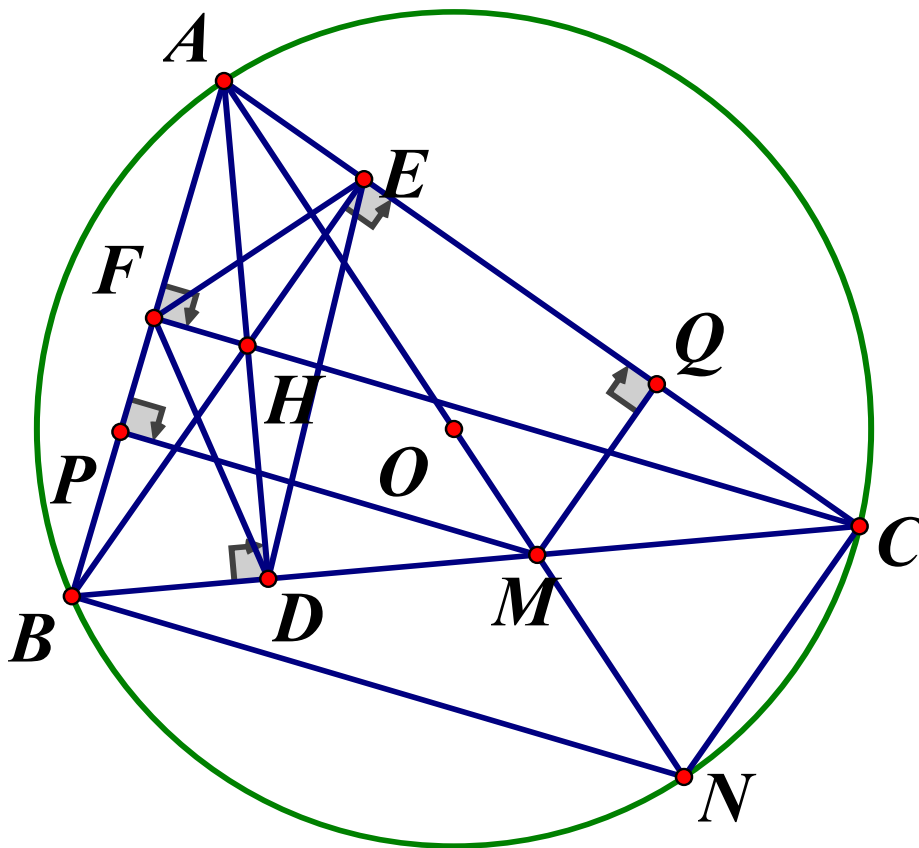
$y \neq 0$, phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (y+2)^2 - 4y(y+1) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\text{Vì } y \in \mathbb{Q}, y \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \\ y=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy có 4 cặp số cần tìm là $(1;1), (2;1), (-1;-1), (0;-1)$

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , có ba đường cao AD, BE, CF ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$) cắt nhau tại H . Tia AO cắt BC tại M và cắt (O) tại N , gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của M trên AB, AC . Chứng minh :



4) DH là tia phân giác của $\angle EDF$

Chứng minh đúng hai tứ giác $BFHD, CEHD$ nội tiếp

Suy ra $\angle HDF = \angle HBF, \angle HDE = \angle HCE$

Mà $\angle HBF = \angle HCE$ (cùng phụ $\angle A$) $\Rightarrow \angle HDF = \angle HDE$

Vậy DH là tia phân giác của $\angle EDF$

$$5) \frac{HE}{HF} = \frac{NB}{NC}$$

Ta có : $NC \perp AC \Rightarrow NC \parallel BH$, tương tự, ta có $NB \parallel CH$ nên $BHCN$ là hình bình hành, tứ giác $BCEF$ nội tiếp, suy ra :

$$\angle FEH = \angle BCH \text{ và } \angle FBH = \angle ECH \Rightarrow \triangle HFE \sim \triangle HBC$$

$$\text{Do đó, } \triangle HFE \sim \triangle NCB \Rightarrow \frac{HE}{HF} = \frac{NB}{NC}$$

$$6) HE.MQ.HB = HF.MP.NC$$

$$MQ \parallel NC (\perp AC) \Rightarrow \frac{MQ}{NC} = \frac{AM}{AN}; MP \parallel NB (\perp AB) \Rightarrow \frac{MP}{NB} = \frac{AM}{AN}$$

$$\frac{MQ}{NC} = \frac{MP}{NB} \Rightarrow \frac{NB}{NC} = \frac{MP}{MQ}, \text{ mà } \frac{HE}{HF} = \frac{NB}{NC} \rightarrow \frac{HE}{HF} = \frac{MP}{MQ} \Rightarrow HE.MQ = HF.MP$$

Lại có : $HB = NC$ (do $HBNC$ là hình bình hành)

Vậy $HE.MQ.HB = HF.MP.NC$