

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN**

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2020 - 2021**

Môn thi: **TOÁN – BẢNG A**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (3,0 điểm).

- a) Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để $A = a^2 + 4a + 2021$ là một số chính phương.
b) Cho đa thức $P(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $P(2019) \cdot P(2020) = 2021$.

Chứng minh rằng đa thức $P(x) - 2022$ không có nghiệm nguyên.

Câu 2 (6,5 điểm).

- a) Giải phương trình $x^2 - 5x + 2 = 2\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x+3}$
b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 - y(x^2 - x - 1) = x^2 - x \\ y(x^2 + 1) - x^3 + x^2 = 2 \end{cases}$$

Câu 3 (1,5 điểm). Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 3}{a + b + c - abc}$

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh A, B, C của tam giác. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và K là trung điểm của HC .

- a) Chứng minh rằng 4 điểm E, K, D, F cùng thuộc một đường tròn.
b) Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt DF tại M . Trên tia DE lấy điểm P sao cho $\widehat{MAP} = \widehat{BAC}$. Chứng minh rằng $\frac{S_{AMF}}{S_{AMP}} = \frac{MF}{MP}$ (Trong đó S_{AMF}, S_{AMP} lần

lượt là diện tích các tam giác AMF và AMP).

Câu 5 (3,0 điểm).

a) Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = a$. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng $R_1 + R_2 \geq a\sqrt{2}$.

b) Cho đa giác đều có 2021 đỉnh, sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu.

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh..... Số báo danh.....

Chú ý: Thí sinh không được phép sử dụng máy tính bỏ túi.

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – NGHỆ AN BẢNG A (2020 – 2021)

Câu 1.

a) Ta có $a^2 + 4a + 2021 = y^2 \Leftrightarrow (a + 2)^2 + 2017 = y^2$

$$\Leftrightarrow 2017 = y^2 - (a + 2)^2 \Leftrightarrow (y - a - 2)(y + a + 2) = 2017$$

Do 2017 là số nguyên tố nên ta có các trường hợp sau xảy ra

$$\text{TH1: } \begin{cases} y - a - 2 = 2017 \\ y + a + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1009 \\ a = -1010 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} y - a - 2 = -2017 \\ y + a + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1009 \\ a = 1006 \end{cases}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} y - a - 2 = 1 \\ y + a + 2 = 2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1009 \\ a = 1006 \end{cases}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} y - a - 2 = -1 \\ y + a + 2 = -2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1009 \\ a = -1010 \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn yêu cầu bài toán là $a = -1010$ và $a = 1006$.

b) Giả sử đa thức $P(x) - 2022$ có nghiệm nguyên $x = a$, khi đó:

$$P(a) - 2022 = (a - a).Q(a) \Leftrightarrow P(a) = 2022 + (a - a).Q(a) \quad (\text{Với } Q(x) \text{ là đa thức hệ số nguyên})$$

Khi đó:

$$P(2019) = 2022 + (2019 - a).Q(2019)$$

$$P(2020) = 2022 + (2020 - a).Q(2020)$$

Mà:

$$P(2019).P(2020) = 2021$$

$$\Leftrightarrow [2022 + (2019 - a).Q(2019)][2022 + (2020 - a).Q(2020)] = 2021$$

$$\Leftrightarrow 2022^2 + 2022[(2019 - a).Q(2019) + (2020 - a).Q(2020)] + (2019 - a)(2020 - a)Q(2019).Q(2020) = 2021 \quad (*)$$

Do $(2019 - a)(2020 - a)$ là hai số tự nhiên liên tiếp, suy ra vế trái của (*) là số chẵn.

Vậy không tồn tại a để đẳng thức (*) xảy ra. Hay đa thức $P(x) - 2022$ không có nghiệm nguyên

Câu 2.

a) Điều kiện: $x \geq 1$

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 - 5x + 2 - 2\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x+3} = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-2) + (\sqrt[3]{x+3}-2) + x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \cdot \frac{x-5}{\sqrt{x-1}+2} + \frac{x-5}{\sqrt[3]{(x+3)^2} + 2\sqrt[3]{x+3} + 4} + (x-1)(x-5) = 0$$

$$(x-5)\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+2} + \frac{1}{\sqrt[3]{(x+3)^2} + 2\sqrt[3]{x+3} + 4} + x-1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

Do $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+2} + \frac{1}{\sqrt[3]{(x+3)^2} + 2\sqrt[3]{x+3} + 4} + x-1, \forall x \geq 1$

Vậy: $x=5$

b) Ta có: $y^2 - y(x^2 - x - 1) = x^2 - x \Leftrightarrow (y^2 - 1) - (x^2 - x - 1)(y + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y-x^2+x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = x^2 - x \end{cases}$$

+ Với $y=-1$, thay vào phương trình thứ 2 và giải ta được: $\begin{cases} x = \sqrt[3]{-3} \\ y = -1 \end{cases}$

+ Với $y = x^2 - x$, thay vào phương trình thứ 2 ta được:

$$(x^2 - x)(x^2 + 1) - x^3 + x^2 = 2 \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Khi đó, hệ có nghiệm: $\begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm: $\begin{cases} x = \sqrt[3]{-3} \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ y = 1 \end{cases}$

Câu 3.

Ta có:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + 3 &= a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca) \\ &= (a+b)(b+c) + (c+a)(a+b) + (b+c)(c+a) \\ a+b+c-abc &= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \\ &= (a+b)(b+c)(c+a) \end{aligned}$$

Khi đó suy ra: $P = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$

Theo nguyên lý Dirichlet trong ba số thực a, b, c luôn tồn tại hai số ≥ 1 hoặc ≤ 1

Giả sử hai số đó là a và b . Khi đó: $(1-a)(1-b) \geq 0 \Leftrightarrow a+b \leq ab+1$

Lại có: $ab+bc+ca=1 \Rightarrow 1-ab=c(a+b) \geq 0 \Rightarrow ab \leq 1$

Từ đó suy ra: $0 < a+b \leq ab+1 \leq 2$

Ta lại có:

$$\frac{1}{c+a} = \frac{a+b}{(c+a)(a+b)} = \frac{a+b}{a^2+1} = (a+b) - \frac{a^2(a+b)}{a^2+1} = (a+b) - \frac{a(a+b)}{a+1/a} \geq a+b - \frac{a(a+b)}{2}$$

Tương tự: $\frac{1}{b+c} \geq a+b - \frac{b(a+b)}{2}$

Từ đó ta có: $P = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b} + 2(a+b) - \frac{(a+b)^2}{2}$

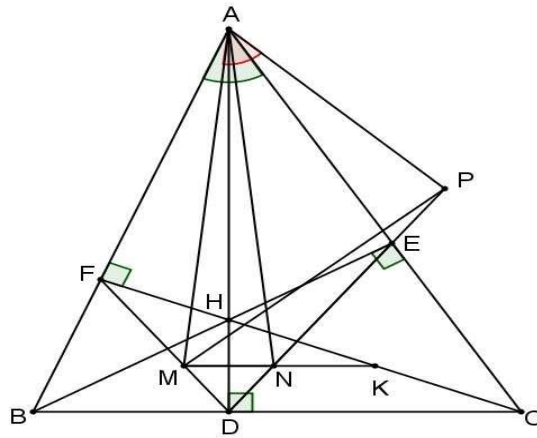
Đặt $a+b = x, 0 < x \leq 2$.

Khi đó:

$$P \geq \frac{1}{x} + 2x - \frac{x^2}{2} = \frac{2+4x^2-x^3}{2x} = \frac{(x-1)^2(2-x)+5x}{2x} = \frac{5}{2} + \frac{(x-1)^2(2-x)}{2x} \geq \frac{5}{2}$$

Vậy minP = 5/2 đạt được khi và chỉ khi a=1; b=1; c=0 và các hoán vị.

Câu 4.



a) +) Do EK là trung tuyến của tam giác vuông EHC $\Rightarrow KE = KC \Rightarrow \widehat{KEC} = \widehat{ECK}$

$$\Rightarrow \widehat{EKF} = \widehat{KCE} + \widehat{KEC} = 2\widehat{ECK} \quad (1)$$

+) Do tứ giác nội tiếp HDCE $\Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{EDH}$

+) Do tứ giác nội tiếp FECB $\Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{EBH}$

+) Do tứ giác nội tiếp FBDH $\Rightarrow \widehat{FBH} = \widehat{FDH}$

Từ đó suy ra: $\widehat{FDE} = \widehat{FDH} + \widehat{EDH} = 2\widehat{EDH} = 2\widehat{ECK} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FDE} = \widehat{EKF}$. Do đó: tứ giác FDKE nội tiếp hay 4 điểm F, D, K, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi N là giao điểm của MK và DE

Ta có:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \widehat{BDN} = \widehat{MNE} \quad (3)$$

$$ABDE \text{ là tứ giác nội tiếp nên } \widehat{BDE} + \widehat{BAE} = 180^\circ \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{MNP} + \widehat{MAP} = 180^\circ$

Do đó: MNPA là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AMP} = \widehat{ANP} \quad (5)$

Lại có: $\triangle AMD = \triangle AND(c.g.c) \Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{AND} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{AMD} = 180^\circ - \widehat{AND}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra: $\widehat{AMP} = \widehat{AMF} = \varphi$

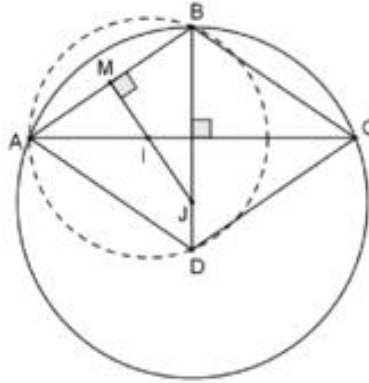
Gọi h_1, h_2 lần lượt là độ cao kẻ từ đỉnh F, P của các tam giác AMF và AMP.

Ta có: $S_{AMF} = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot MA = \frac{1}{2} \cdot (MF \cdot \sin \varphi) \cdot MA$. Tương tự: $S_{AMP} = \frac{1}{2} \cdot MA \cdot MP \cdot \sin \varphi$

Từ đó suy ra: $\frac{S_{AMF}}{S_{AMP}} = \frac{MF}{MP}$

Câu 5.

a)



Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Đường trung trực của đoạn AB cắt các đường AC và BD lần lượt tại I, J. Khi đó I, J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABD và ABC.

Dễ thấy: $\triangle MAI \sim \triangle MJB(g.g) \Rightarrow \frac{MA}{AI} = \frac{MJ}{JB} \Rightarrow \frac{MA}{R_2} = \frac{MJ}{R_1}$

$$\Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{MJ^2}{R_1^2} \Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{JB^2 - MB^2}{R_1^2} = \frac{R_1^2 - MB^2}{R_1^2}$$

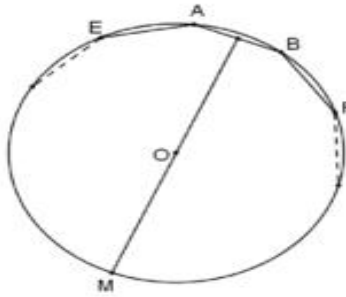
$$\Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} + \frac{MB^2}{R_1^2} = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{4R_2^2} + \frac{a^2}{4R_1^2} = 1$$

$$\text{Khi đó: } 1 = \frac{a^2}{4R_2^2} + \frac{a^2}{4R_1^2} \geq \frac{a^2}{2R_1R_2} \Rightarrow R_1R_2 \geq \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Do đó: } R_1 + R_2 \geq 2\sqrt{R_1R_2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{2}} = a\sqrt{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $R_1=R_2$ hay tứ giác ABCD là hình vuông.

b)



Do đa giác đã cho là đa giác đều nên đa giác đó nội tiếp đường tròn tâm O.

Do 2021 là số lẻ nên tồn tại 2 đỉnh kề nhau tô cùng màu. Giả sử 2 đỉnh đó là A và B và cùng được tô màu đỏ.

Cũng do đa giác đã cho đều và có số đỉnh lẻ nên tồn tại đỉnh M của đa giác nằm trên trung trực đoạn AB

$\Rightarrow \triangle MAB$ cân.

Ta xét hai khả năng xảy ra:

+) Khả năng 1: Nếu tô màu đỏ $\Rightarrow$ đpcm.

+) Khả năng 2: Nếu M tô màu xanh.

Gọi E, F là các đỉnh kề của A và B có: $EA = AB = BF \Rightarrow EF \parallel AB \Rightarrow \triangle MEF$ cân tại M. Khi đó:

Nếu E, F màu xanh thì $\triangle MEF$ cân và thỏa mãn bài toán

Nếu một trong hai đỉnh E, F màu đỏ, giả sử E màu đỏ thì $\triangle EAB$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vậy luôn tồn tại 3 đỉnh của đa giác đều đã cho lập nên một tam giác cân có các đỉnh cùng màu