

Câu 1: (4 điểm)

1. Chứng minh rằng: $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}} = 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$ với $a > 0$. Áp dụng để tính giá trị biểu thức: $B = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$.
2. Tính giá trị của biểu thức $C = (x^{2022} - 8x^{2021} + 11x^{2020}) + (y^{2022} - 8y^{2021} + 11y^{2020})$ biết $x = 4 + \sqrt{5}$ và $y = 4 - \sqrt{5}$.

Câu 2: (4 điểm)

1. Giải phương trình: $2x^2 - 2x + 1 = (2x + 1)(\sqrt{x^2 - x + 2} - 1)$
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2022 - y} = \sqrt{4044} \\ \sqrt{2022 - x} + \sqrt{y} = \sqrt{4044} \end{cases}$$

Câu 3: (6 điểm)

1. Tìm số tự nhiên n biết tích các chữ số của n bằng $n^2 - 10n - 22$.
2. Tìm các số thực a, b sao cho đa thức $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$.
3. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $xy + yz + zx + 2xyz = 1$. Chứng minh rằng $x + y + z \geq \frac{3}{2}$.

Câu 4: (6 điểm)

- Cho đường tròn (O) , đường kính AB . Gọi C là trung điểm của bán kính OB và (I) là đường tròn đường kính AC , Trên đường tròn (O) lấy hai điểm tùy ý phân biệt M, N khác A và B . Gọi P, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của AM và AN với đường tròn (I) .
1. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng PQ .
2. Vẽ tiếp tuyến ME của (I) với E là tiếp điểm. Chứng minh: $ME^2 = MA \cdot MP$.
3. Vẽ tiếp tuyến NF của (I) với F là tiếp điểm. Chứng minh: $\frac{ME}{NF} = \frac{AM}{AN}$.

----- HẾT -----

Thí sinh không được mang máy tính và tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.
Họ và tên thí sinh: **Số báo danh:**
Chữ kí GT1: **Chữ kí giám thị 2:**

LỜI GIẢI

Câu 1: (4 điểm)

1. Chứng minh rằng: $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}} = 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$ với $a > 0$. Áp dụng để tính giá trị

biểu thức: $B = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$.

2. Tính giá trị của biểu thức $C = (x^{2022} - 8x^{2021} + 11x^{2020}) + (y^{2022} - 8y^{2021} + 11y^{2020})$ biết $x = 4 + \sqrt{5}$ và $y = 4 - \sqrt{5}$.

Lời giải

1. Với $a > 0$, ta có:

$$\left(1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + 2\left(1 \cdot \frac{1}{a} - 1 \cdot \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a(a+1)}\right) = 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}$$

Suy ra $\sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}} = 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$

Áp dụng: $B = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$

$$B = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + 1 + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$B = 100 - \frac{1}{100} = \frac{9999}{100}$$

2. Ta có: $C = (x^{2022} - 8x^{2021} + 11x^{2020}) + (y^{2022} - 8y^{2021} + 11y^{2020})$

$$C = x^{2020}(x^2 - 8x + 11) + y^{2020}(y^2 - 8y + 11)$$

Với $x = 4 + \sqrt{5}$ và $y = 4 - \sqrt{5}$, ta được

$$x^2 - 8x + 11 = (4 + \sqrt{5})^2 - 8(4 + \sqrt{5}) + 11 = 21 + 8\sqrt{5} - 32 - 8\sqrt{5} + 11 = 0$$

$$y^2 - 8y + 11 = (4 - \sqrt{5})^2 - 8(4 - \sqrt{5}) + 11 = 21 - 8\sqrt{5} - 32 + 8\sqrt{5} + 11 = 0$$

Do đó $C = 0$

Câu 2: (4 điểm)

1. Giải phương trình: $2x^2 - 2x + 1 = (2x+1)(\sqrt{x^2 - x + 2} - 1)$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2022 - y} = \sqrt{4044} \\ \sqrt{2022 - x} + \sqrt{y} = \sqrt{4044} \end{cases}$$

Lời giải

1. Ta có $2x^2 - 2x + 1 = (2x+1)(\sqrt{x^2 - x + 2} - 1)$ (1)

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 = (2x+1)\sqrt{x^2 - x + 2} - 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 = (2x+1)\sqrt{x^2 - x + 2}$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 + 8x^2 + 4 = (4x^2 + 4x + 1)(x^2 - x + 2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 + 8x^2 + 4 = 4x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 4x^3 - 4x^2 + 8x + x^2 - x + 2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4.3.2 = 25$$

$$\text{Do đó } x_1 = \frac{7 - \sqrt{25}}{2.3} = \frac{1}{3}; x_2 = \frac{7 + \sqrt{25}}{2.3} = 2$$

Vậy phương trình (1) có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{1}{3}; 2 \right\}$.

2. ĐKXD: $0 \leq x; y \leq 4044$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2022 - y} = \sqrt{4044} \\ \sqrt{2022 - x} + \sqrt{y} = \sqrt{4044} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2022 - y} - \sqrt{2022 - x} - \sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{2022 - x} + \sqrt{y} - \sqrt{2022 - y} - \sqrt{x} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Giải (2): } (\sqrt{x} - \sqrt{y}) + (\sqrt{2022 - y} - \sqrt{2022 - x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{x - y}{\sqrt{2022 - y} + \sqrt{2022 - x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y) \left(\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2022 - y} + \sqrt{2022 - x}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y = 0 \quad \left(\text{Do } \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2022 - y} + \sqrt{2022 - x}} \neq 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

Thay $x = y$ vào phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{2022 - y} = \sqrt{4044}$, ta được:

$$\sqrt{x} + \sqrt{2022 - x} = \sqrt{4044} \Leftrightarrow 2022 + 2\sqrt{x(2022 - x)} = 4044 \Leftrightarrow x(2022 - x) = 1011^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2022x + 1011^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1011)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1011$$

Suy ra $y = x = 1011$ (nhận)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1011; 1011)$.

Câu 3: (6 điểm)

1. Tìm số tự nhiên n biết tích các chữ số của n bằng $n^2 - 10n - 22$.

2. Tìm các số thực a, b sao cho đa thức $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$.

3. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $xy + yz + zx + 2xyz = 1$. Chứng minh rằng $x + y + z \geq \frac{3}{2}$.

Lời giải

1. Ta thấy $n^2 - 10n - 22 = (n - 5)^2 - 47$

Do 47 không là số chính phương nên $(n - 5)^2 - 47$ không thể phân tích thành tích của hai số tự nhiên.

Mà theo đề bài $n^2 - 10n - 22$ là tích của các chữ số của n và

$$n^2 - 10n - 22 = 1.2.3. \dots (n^2 - 10n - 22)$$

Suy ra trong n có chữ số 1 và chữ số có giá trị bằng $n^2 - 10n - 22$

$$\text{Mà } 1 \leq n^2 - 10n - 22 \leq 9$$

$$\Rightarrow 0 \leq n \leq 5 + 1\sqrt{14}$$

$$\Rightarrow 0 \leq n \leq 12$$

Vì trong n có chữ số 1 và chữ số có giá trị bằng $n^2 - 10n - 22$ nên $n \in \{12; 11; 10\}$

Nếu $n = 12$ thì $n^2 - 10n - 22 = 2$ do đó $n = 12$ thỏa yêu cầu bài toán

Nếu $n = 11$ thì $n^2 - 10n - 22 = -11$ do đó $n = 11$ không thỏa yêu cầu bài toán

Nếu $n = 10$ thì $n^2 - 10n - 22 = -22$ do đó $n = 10$ không thỏa yêu cầu bài toán

Vậy $n = 12$ thì tích các chữ số của n bằng $n^2 - 10n - 22$.

2. Ta thấy $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$

Do đó đa thức $A(x) = 4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$ khi đa thức

$A(x) = 4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ chia hết cho đa thức $x - 3$ và $x + 1$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} A(3) = 0 \\ A(-1) = 0 \end{cases} \text{ khi đó } \begin{cases} -2a - 5b = -9 \\ -18a + 15b = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 5b = 9 \\ -6a + 5b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy $a = 2, b = 1$

3. Vì x, y, z là các số thực dương nên ta có: $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương x, y, z , ta có:

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow (x + y + z)^3 \geq 27xyz \Rightarrow \frac{2}{9}(x + y + z)^3 \geq 6xyz \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } (x + y + z)^2 + \frac{2}{9}(x + y + z)^3 \geq 3(xy + yz + zx) + 6xyz$$

$$\Rightarrow (x + y + z)^2 + \frac{2}{9}(x + y + z)^3 \geq 3(xy + yz + zx + 2xyz)$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 + \frac{2}{9}(x + y + z)^3 \geq 3$$

$$\Leftrightarrow 9(x + y + z)^2 + 2(x + y + z)^3 - 27 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow [2(x + y + z) - 3](x + y + z + 3)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x + y + z) - 3 \geq 0 \quad (\text{do } (x + y + z + 3)^2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z) \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra khi } \begin{cases} x = y = z \\ 2xyz + xy + yz + zx = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ 2x^3 + 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } x + y + z \geq \frac{3}{2} \text{ (đpcm)}$$

Câu 4: (6 điểm)

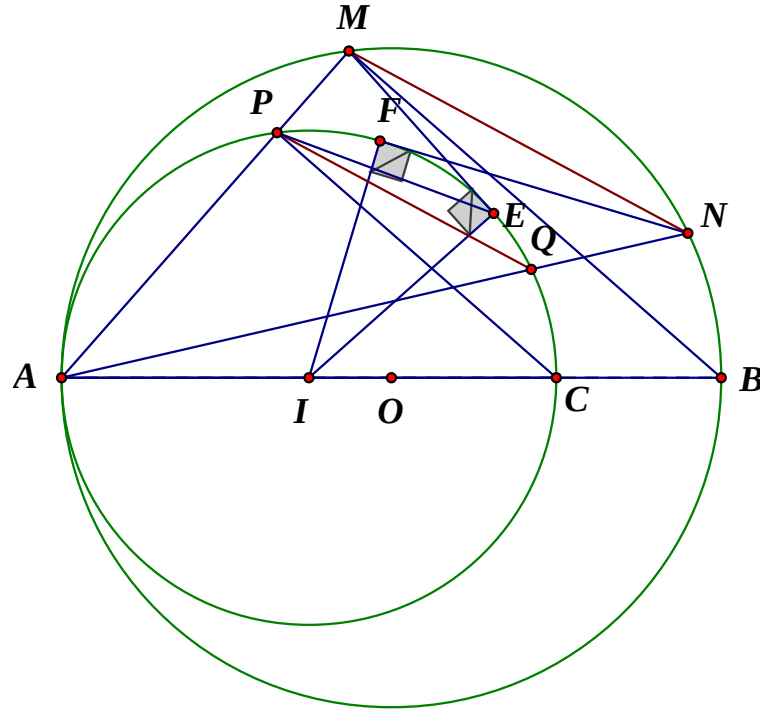
Cho đường tròn (O) , đường kính AB . Gọi C là trung điểm của bán kính OB và (I) là đường tròn đường kính AC , Trên đường tròn (O) lấy hai điểm tùy ý phân biệt M, N khác A và B . Gọi P, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của AM và AN với đường tròn (I) .

1. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng PQ .

2. Vẽ tiếp tuyến ME của (I) với E là tiếp điểm. Chứng minh: $ME^2 = MA \cdot MP$.

3. Vẽ tiếp tuyến NF của (I) với F là tiếp điểm. Chứng minh: $\frac{ME}{NF} = \frac{AM}{AN}$.

Lời giải



1) Xét đường tròn (O) có: $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow MB \perp AM \quad (1)$$

Xét đường tròn (I) có: $\widehat{APC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow PC \perp AM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MB \parallel PC \Rightarrow \widehat{ACP} = \widehat{ABM}$ (3) (hai góc đồng vị)

Xét đường tròn (I) có: $\widehat{ACP} = \widehat{AQP}$ (4) (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AP}$)

Xét đường tròn (O) có: $\widehat{ABM} = \widehat{ANM}$ (5) (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AM}$)

Từ (3),(4),(5) suy ra $\widehat{AQP} = \widehat{ANM}$

Mà $\widehat{AQP}, \widehat{ANM}$ là hai góc đồng vị, suy ra $MN \parallel PQ$ (đpcm).

2) Xét $\triangle MEP$ và $\triangle MAE$ có:

$$\widehat{MAE} = \widehat{MEP} \text{ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn } \widehat{PE} \text{)}$$

$$\widehat{AME} \text{ là góc chung}$$

Do đó $\triangle MEP \sim \triangle MAE$ (TH3)

$$\Rightarrow \frac{ME}{MA} = \frac{MP}{ME}$$

$$\Rightarrow ME^2 = MA.MP \text{ (đpcm).}$$

3) Ta có $MB \parallel PC$ (cmt)

$$\text{Áp dụng định lí Ta-lét, ta có } \frac{MP}{NQ} = \frac{MA}{NA}$$

Mà $ME^2 = MA.MP$ (chứng minh câu 2)

Chứng minh tương tự, ta được: $NF^2 = NQ.NA$

$$\text{Do đó } \frac{ME^2}{NF^2} = \frac{MP.MA}{NQ.NA} = \frac{MP}{NQ} \cdot \frac{MA}{NA} = \frac{MA}{NA} \cdot \frac{MA}{NA} = \left(\frac{MA}{NA} \right)^2$$

$$\text{Suy ra } \left(\frac{ME}{NF} \right)^2 = \left(\frac{AM}{AN} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{ME}{NF} = \frac{AM}{AN} \quad (\text{đpcm}).$$

----- HẾT -----