

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HƯNG YÊN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỶ THI TUYỂN SINH VÀO 10 THPT

NĂM HỌC 2020 – 2021

Môn thi: TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1.

Cho biểu thức $M = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1} \right) \begin{pmatrix} x \geq 0 \\ x \neq 1; x \neq 9 \end{pmatrix}$

- 1) Rút gọn biểu thức M
- 2) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị nguyên dương

Câu 2.

- 1) Tìm hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng với hệ số góc dương, đi qua điểm $A(2;1)$ và tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{2}$
- 2) Tìm các giá trị của m để phương trình $2x^2 - (m+5)x + m + 2 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = \frac{17}{4}$

Câu 3.

- 1) Giải phương trình: $5x^2 - 2x - 3 - (2x-1)\sqrt{5x^2 + 2x - 1} = 0$
- 2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x^2 - 2) + x^2y + 4 = 2(x^2 + y) \\ x^2 - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Câu 4.

- 1) Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh a . M là điểm di động trên đoạn OB ($M \neq O, M \neq B$). Vẽ đường tròn tâm I đi qua M và tiếp xúc với BC tại B , vẽ đường tròn tâm J đi qua M và tiếp xúc với BC tại B , vẽ đường tròn tâm J đi qua M và tiếp xúc với CD tại D . Đường tròn (I) và đường tròn (J) cắt nhau tại điểm thứ hai là N
 - a) Chứng minh rằng 5 điểm A, N, B, C, D cùng thuộc một đường tròn
 - b) Chứng minh 3 điểm C, M, N thẳng hàng
- 2) Cho tam giác MNP vuông cân tại M , $MN = a$. Lấy điểm D thuộc cạnh MN , điểm E thuộc cạnh NP sao cho chu vi tam giác NDE bằng $2a$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác NDE

Câu 5.

Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3 + 4ab \leq 12$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2020ab \leq 2021$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\begin{aligned}
 1) M &= \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1} \right) \begin{pmatrix} x \geq 0 \\ x \neq 1; x \neq 9 \end{pmatrix} \\
 &= \left[\frac{2x+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right] : \frac{x+\sqrt{x}+1-x-4}{x+\sqrt{x}+1} \\
 &= \frac{2x+1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \\
 2) M &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+3}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-3}
 \end{aligned}$$

$$M \in \mathbb{Q}^+ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Q} \\ -1 < \frac{3}{\sqrt{x}-3} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \in \{1; 3\} \Rightarrow x \in \{16; 36\}$$

Câu 2.

1) Hàm số bậc nhất có dạng $y = ax + b (a > 0)$

Do đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2;1) \Rightarrow 2a + b = 1$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;b)$ và cắt trục hoành tại điểm $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ tạo với

hai trục tọa độ tam giác vuông có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ nên ta có:

$$\frac{1}{2} \left| b \right| \cdot \left| -\frac{b}{a} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b^2 = a \Rightarrow 2b^2 + b - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \text{hàm số: } y = x - 1 \\ b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{hàm số: } y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

2) Ta có : $\Delta = m^2 + 10m + 25 - 8m - 16 = m^2 + 2m + 9 > 0 \forall m$

Theo hệ thức Vi – et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+5}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m+2}{2} \end{cases}$. Theo bài ra ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{17}{4} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m+5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{m+2}{2} = \frac{17}{4} \Leftrightarrow m^2 + 10m + 25 - 4m - 8 = 17$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -6 \end{cases}$$

Vậy $m = 0; m = -6$ là các giá trị cần tìm.

Câu 3.

$$1) \text{ Cho phương trình : } 5x^2 - 2x - 3 - (2x-1)\sqrt{5x^2 + 2x - 1} = 0 \quad (1)$$

ĐKXĐ: $\sqrt{5x^2 + 2x - 1} \geq 0$. Đặt $\sqrt{5x^2 + 2x - 1} = a (a \geq 0), 2x - 1 = b$

Phương trình (1) trở thành: $a^2 - 2b - 4 - ab = 0 \Leftrightarrow (a+2)(a-b-2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 (k\text{tm do } a > 0) \\ a = b + 2 \Rightarrow \sqrt{5x^2 + 2x - 1} = 2x - 1 + 2 \Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 2x - 1} = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 5x^2 + 2x - 1 = (2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} (tm) \\ x = 1 - \sqrt{3} (k\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1 + \sqrt{3}$

$$2) \text{ Cho hệ phương trình } \begin{cases} x(x^2 - 2) + x^2y + 4 = 2(x^2 + y) & (1) \\ x^2 - y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có :

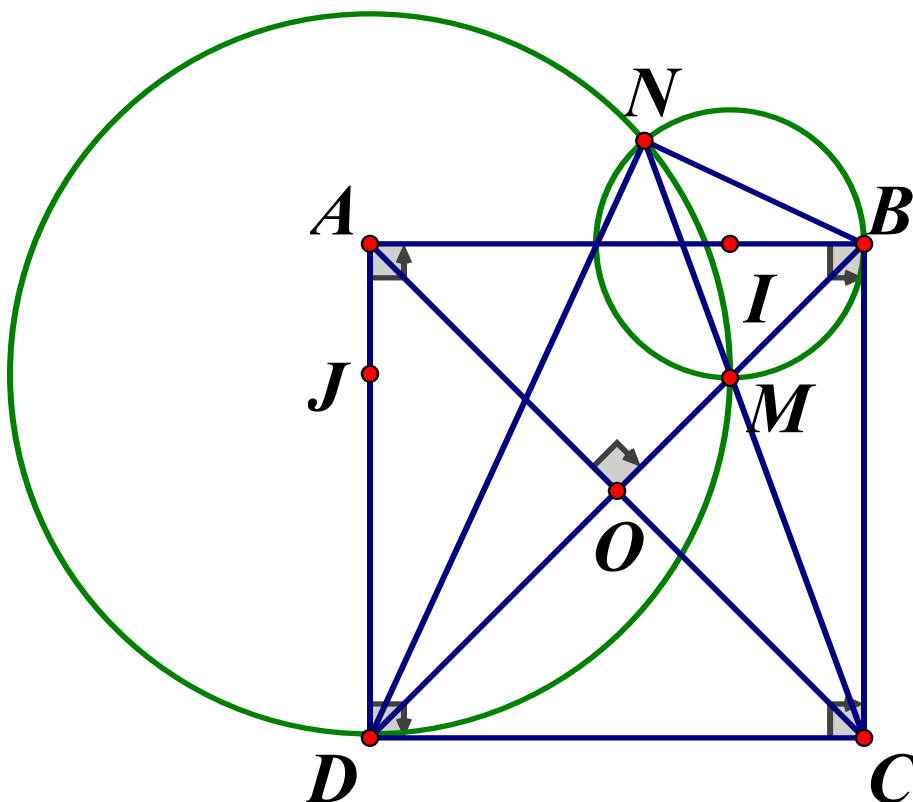
$$(1) \Leftrightarrow x(x^2 - 2) + x^2y - 2y - 2x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x + y - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = 2 - x \end{cases}$$

$$*) x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (x; y) \in \{(\sqrt{2}; 4); (-\sqrt{2}; 4)\}$$

$$*) y = 2 - x \Rightarrow x^2 - 2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm $(x; y) \in \{(-\sqrt{2}; 4); (\sqrt{2}; 4); (0; 2); (-1; 3)\}$

Câu 4.
1)



a) Xét đường tròn (I) có $\angle BNM = \angle MBC = 45^\circ$

Xét đường tròn (J) có $\angle DNM = \angle MDC = 45^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{DNB} = \widehat{BNM} + \angle DNM = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

Xét tứ giác $DNBC$ có $\widehat{DNB} + \widehat{DCB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

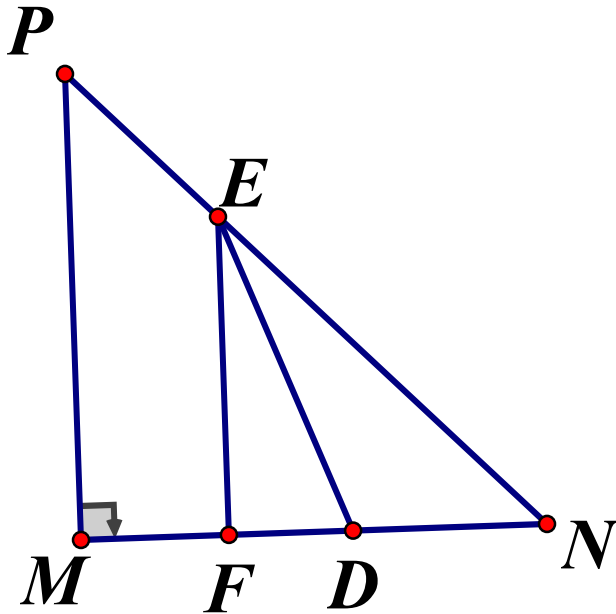
Mà $\widehat{DNB}$ và $\angle DCB$ là hai góc đối nhau nên $DNBC$ là tứ giác nội tiếp

Mà $ABCD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow 5$ điểm A, N, B, C, D cùng thuộc một đường tròn

b) Do 5 điểm A, N, B, C, D cùng thuộc một đường tròn nên $\widehat{BNC} = \widehat{BNC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) $\Rightarrow NC$ là tia phân giác của $\widehat{BND}$

Theo ý a, ta có NM là tia phân giác của $\widehat{BND} \Rightarrow C, M, N$ thẳng hàng

2)



Đặt $DN = x, NE = y$

Kẻ $EF \perp MN$ ta có:

$$EF = NE \cdot \sin N = y \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} y$$

$$NF = NE \cdot \cos N = y \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} y$$

$$DF = \frac{\sqrt{2}}{2} y - x \Rightarrow DE = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} y - x\right)^2} = \sqrt{x^2 - \sqrt{2}xy + y^2}$$

Do chu vi tam giác là $2a$ nên $x + y + \sqrt{x^2 - \sqrt{2}xy + y^2} = 2a$

$$S_{NDE} = \frac{1}{2} ND \cdot EF = \frac{1}{2} x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} y = \frac{\sqrt{2}}{4} xy$$

Ta có: $x + y \geq 2\sqrt{xy}; x^2 + y^2 \geq 2xy$

$$\Rightarrow x + y + \sqrt{x^2 - \sqrt{2}xy + y^2} \geq 2\sqrt{xy} + \sqrt{2xy - \sqrt{2}xy} = \sqrt{xy} (2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}})$$

$$\Rightarrow xy \leq \left(\frac{2a}{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}} \right)^2 \Rightarrow S_{NDE} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{2a}{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}} \right)^2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{2a}{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$

Câu 5.

Từ giả thiết $(a + b)^3 + 4ab \leq 12 \Rightarrow 12 \geq (a + b)^3 + 4ab$ và $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ nên:

$$12 \geq (2\sqrt{ab})^3 + 4ab \text{ (Dấu "=" xảy ra khi } a = b)$$

$$\Rightarrow 8ab\sqrt{ab} + 4ab - 12 \leq 0 \Leftrightarrow 2ab\sqrt{ab} + ab - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2ab\sqrt{ab} - 2 + ab - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2\left[(\sqrt{ab})^3 - 1\right] + (\sqrt{ab})^2 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{ab} - 1)\left[2(ab + \sqrt{ab} + 1) + \sqrt{ab} + 1\right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{ab} - 1)(2ab + 3\sqrt{ab} + 3) \leq 0$$

$$\text{Do } a, b > 0 \text{ nên } 2ab + 3\sqrt{ab} + 3 > 0 \Rightarrow \sqrt{ab} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow ab \leq 1$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a = b \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1$. Ta chứng minh được:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (\sqrt{ab} - 1)}{(1+a)(1+b)(1+\sqrt{ab})} \leq 0 \text{ (luôn đúng vì } a, b > 0, ab \leq 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2020ab \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} + 2020ab$$

Đặt $\sqrt{ab} = t (0 < t \leq 1)$. Ta cần chứng minh: $\frac{2}{1+t} + 2020t^2 \leq 2021$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2020t^2 + 4040t + 2019) \leq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $t = 1$ hay $a = b = 1$