

Bài 1 (4,0 điểm). Giải phương trình $(x^2 - 10x + 21)\sqrt{x - 3} = x^3 - 11x^2 + 34x - 27 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Bài 2 (5,0 điểm). Cho dãy số (x_n) được xác định như sau:
$$\begin{cases} x_1 = x_2 = a \\ x_{n+2} = x_{n+1} + 2 \cdot \frac{\sqrt{x_n}}{(n+1)^3}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

trong đó a là một số thực dương cho trước.

a) Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c$. Tìm số thực α để dãy (y_n) xác định bởi $y_n = n^\alpha(c - x_n), \forall n \geq 1$ có giới hạn hữu hạn khác 0.

Bài 3 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Gọi T là giao điểm thứ hai của đường thẳng CH với đường tròn (O) ; I là giao điểm của AT với BC ; J là giao điểm của AD với EF . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn HC, HE . Lấy điểm P trên EF sao cho MP song song với DE , điểm Q trên BJ sao cho EQ song song với NP .

a) Chứng minh rằng ba điểm I, E, Q thẳng hàng.

b) Gọi X là giao điểm của BH với CO , Y là giao điểm của CH với BO , Z là trực tâm tam giác DEF . Chứng minh rằng OZ chia đôi đoạn XY .

Bài 4 (5,0 điểm). Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \dots, 2048\}$.

a) Chứng minh khẳng định sau: “Với mọi tập con X của tập S có số phần tử bằng 15, luôn tồn tại hai tập con khác rỗng rời nhau A, B của tập X sao cho $\sum_{i \in A} i = \sum_{j \in B} j$ ”.

Khẳng định này còn đúng không khi số phần tử của tập X bằng 12?

b) Tập con Y khác rỗng của S thỏa mãn điều kiện: $\forall y \in Y$ thì $15y \notin Y$. Tìm số phần tử lớn nhất có thể của tập Y .

—————HẾT—————

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.