

Đề bài

1. (5 điểm.) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(xy) = yf(x) + x + f(f(y) - f(x))$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

2. (5 điểm.) Cho $n \geq 2$ số tự nhiên $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ sao cho $a_n < 2a_1$. Gọi m là số các ước nguyên tố phân biệt của $a_1 a_2 \dots a_n$. Chứng minh rằng $(a_1 a_2 \dots a_n)^{m-1} \geq (n!)^m$.
3. (5 điểm.) Có n đồng đá, mỗi đồng có 2021 viên. Khối lượng của các viên đá, tính theo kg , bằng một trong các số $1, 2, \dots, 25$ và tổng khối lượng của các đồng là đôi một khác nhau. Biết rằng nếu chọn hai đồng bất kỳ và lấy ra từ mỗi đồng một viên đá nặng nhất và một viên đá nhẹ nhất thì đồng ban đầu nặng hơn sẽ trở nên nhẹ hơn. Hỏi giá trị lớn nhất có thể của n là bao nhiêu?
4. (5 điểm.) Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , với trực tâm H . Một đường thẳng bất kỳ qua H cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại Z, Y . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác BHY, CHZ cắt BC lần lượt tại E và F . HE cắt AB tại K , HF cắt AC tại L . Gọi T là hình chiếu vuông góc của O trên KL .
- a) Chứng minh rằng KL, YZ, BC đồng quy.
- b) Chứng minh rằng T nằm trên trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp các tam giác BHY, CHZ .

Đáp án

1. Thế $x = y = 1$ vào phương trình hàm, ta được $f(1) = f(1) + 1 + f(0)$, dẫn đến $f(0) = -1$.

Tiếp theo, thế $y = 1$ vào phương trình hàm, ta được $f(x) = f(x) + x + f(f(1) - f(x))$, dẫn đến $-x = f(f(1) - f(x))$. Điều này chứng tỏ f là một toàn ánh.

Bây giờ, lần lượt thay $(x, y) = (a, 0)$ rồi $(x, y) = (0, a)$, ta được $f(0) = 0 + a + f(f(0) - f(a))$ và $f(0) = af(0) + 0 + f(f(a) - f(0))$, dẫn đến

$$-1 = a + f(-1 - f(a)) \quad \text{và} \quad -1 = -a + f(f(a) + 1).$$

Cộng các đẳng thức trên, ta thu được

$$f(f(a) + 1) + f(-f(a) - 1) = 2.$$

Do f là toàn ánh, với mọi $z \in \mathbb{R}$, ta có thể tìm được a để $z = f(a) + 1$ và đẳng thức ngay trên cho thấy

$$f(z) + f(-z) = 2. \quad (*)$$

Bây giờ, thay $(x, y) = (a, 1)$ rồi $(x, y) = (1, a)$ ta thu được $f(a) = f(a) + a + f(f(1) - f(a))$, hay $f(f(1) - f(a)) = -a$ và $f(a) = af(1) + 1 + f(f(a) - f(1))$. Cộng hai đẳng thức lại và sử dụng $(*)$ ta có

$$f(a) = af(1) + a - 1.$$

Nghĩa là $f(x) = cx - 1$ với c là một hằng số. Thế vào phương trình hàm ban đầu ta thấy rằng $c = 1$ hoặc $c = -1$ và đây là các giá trị duy nhất thỏa mãn bài toán.

Như vậy, $f(x) = x - 1$ hoặc $f(x) = -x - 1$ là các nghiệm hàm của bài toán.

2. Gọi p là một ước số nguyên tố của tích $a_1 a_2 \cdots a_n$. Ta đặt $a_i = p^{k_i} b_i$, trong đó b_i không chia hết cho p ($i = 1, 2, \dots, n$). Tiếp theo, vì $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 2a_1$, chúng ta thấy rằng tất cả các b_i là đôi một phân biệt. Thật vậy, nếu $b_i = b_j$ với $i > j$ nào đó thì

$$\frac{a_i}{a_j} = \frac{p^{k_i} b_i}{p^{k_j} b_j} = p^{k_i - k_j} \geq 2,$$

mâu thuẫn. Vì các b_i đôi một phân biệt, ta suy ra $b_1 b_2 \cdots b_n \geq n!$. Suy ra

$$a_1 a_2 \dots a_n = p^{k_1 + k_2 + \dots + k_n} b_1 b_2 \dots b_n \geq p^{e_p} n!,$$

trong đó e_p là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của $a_1 \dots a_n$. Nhân các bất đẳng thức thu được đối với tất cả các ước nguyên tố của tích $a_1 a_2 \dots a_n$, ta suy ra điều phải chứng minh.

3. Sắp xếp các đồng đá theo thứ tự khối lượng tăng dần, tổng khối lượng của đồng thứ i được ký hiệu là s_i ; và sau khi bỏ đi viên đá nặng nhất và viên đá nhẹ nhất từ đó thì khối lượng còn lại là s'_i . Khi đó ta có các bất đẳng thức sau $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ và $s'_1 > s'_2 > \dots > s'_n$.

Để ý rằng viên đá nặng nhất của đồng thứ nhất không nhẹ hơn mỗi viên của đồng đá đó nên nó cũng không nhẹ hơn $\frac{s'_1}{2019}$. Từ đó, tổng khối lượng của viên đá nặng nhất của và viên đá nhẹ nhất của đồng thứ nhất không nhỏ hơn $\frac{s'_1}{2019} + 1$. Nghĩa là $s_1 - s'_1 = x \geq \frac{s'_1}{2019} + 1$.

Tương tự, khối lượng của viên đá nhẹ nhất của đồng thứ n không vượt quá $\frac{s'_n}{2019}$ và khối lượng của viên nặng nhất không vượt quá 25 nên ta có $s_n - s'_n \leq \frac{s'_n}{2019}$.

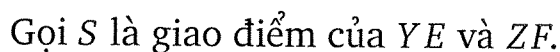
Từ đó suy ra

$$\frac{s'_1}{2019} + 1 \leq x = s_1 - s'_1 \leq s_n - s'_n - 2(n-1) \leq \frac{s'_n}{2019} + 25 - 2(n-1).$$

Dẫn đến $2(n-1) \leq \frac{s'_n}{2019} - \frac{s'_1}{2019} + 24 < 24$, chứng tỏ $n < 13$.

Để kết thúc, xét 12 đồng đá như sau: đồng đá thứ k , với $k = 1, \dots, 12$, có: 1 viên nhẹ nhất có khối lượng $2k$, 2007 viên có khối lượng 24 và $13 - k$ viên có khối lượng nặng nhất là 25. Để thấy tình huống này thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

4. a) Cách 1.



Ta có $\angle YZS + \angle ZYS = \angle HCF + \angle HBE = 180^\circ - \angle BHC = \angle BAC$, do đó $\angle YSZ + \angle YAZ = 180^\circ$. Suy ra tứ giác $AYSZ$ nội tiếp.

Suy ra $\angle YAS = \angle SZY = \angle HCB = \angle HAB$, ta thu được $S \in AH$.

Áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác KYE và LZF ta có KE giao LF tại H , KY giao LZ tại A , YE giao ZF tại S và H, A, S thẳng hàng nên KL, YZ, EF đồng quy.

Cách 2.

Gọi X là giao của AH với (BYH) .

KL, YZ, BC đồng quy khi và chỉ khi $(BKYA) = (CLZA)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (BKYA) = H(BKYA) = (BEYX) &= -\frac{BY}{BX} : \frac{EY}{EX} = -\frac{\sin \angle BHY}{\sin \angle BHX} : \\ \frac{\sin \angle EHY}{\sin \angle EHX} &= -\frac{\sin \angle BHY}{\sin \angle ACB} : \frac{\sin \angle ABC}{\sin \angle CHZ} = -\frac{\sin \angle BHY \cdot \sin \angle CHZ}{\sin \angle ABC \cdot \sin \angle ACB}. \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $(CLZA) = -\frac{\sin \angle BHY \cdot \sin \angle CHZ}{\sin \angle ABC \cdot \sin \angle ACB}$.

Vậy $(BKYA) = (CLZA)$.

b) Trước tiên ta phát biểu một bổ đề quen thuộc sau.

Bổ đề. Cho tứ giác $ABCD$ và một điểm P nằm trong tứ giác thỏa mãn $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$. Khi đó P có liên hợp đẳng giác trong tứ giác $ABCD$.

Chứng minh. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là hình chiếu của P trên AB, BC, CD, DA . Bằng phép cộng góc đơn giản ta thấy $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$ tương đương X, Y, Z, T cùng thuộc một đường tròn tâm J . Gọi Q là điểm đối xứng với P qua J thì Q là điểm liên hợp đẳng giác của P trong tứ giác $ABCD$.

Trở lại bài toán.

Ta có $\angle KHL = 180^\circ - \angle KHY - \angle LHZ = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - \angle BHC$ nên H có điểm liên hợp đẳng giác trong tứ giác $BKLC$.

Mà BH, BO và CH, CO là các cặp đường đẳng giác trong góc B, C nên H, O liên hợp đẳng giác trong tứ giác $BKLC$. Do đó hình chiếu của O trên KL nằm trên đường tròn pedal của H, O trong tứ giác $BKLC$ hay T nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC .

Gọi I là giao của KL và BC . Ta có H, O liên hợp đẳng giác trong tam giác ILC nên IH, IO đẳng giác trong $\angle LIC$. Suy ra $IH \perp TM$.

Gọi N là trung điểm của AH . HT cắt (O) tại P, Q sao cho P nằm trên tia HT .

Ta có MN là đường kính của đường tròn Euler nên $\angle NTM = 90^\circ$, suy ra $NT \parallel YZ$.

Phép vị tự tâm H tỉ số 2 biến đường tròn Euler thành (O) nên T là trung điểm của HP . Suy ra $NT \parallel AP$. Ta thu được $AP \parallel YZ$.

Suy ra $\angle YHQ = \angle APQ = 180^\circ - \angle YBQ$, hay tứ giác $BYHQ$ nội tiếp.

Tương tự tứ giác $CZHQ$ nội tiếp. Vậy T nằm trên trục đẳng phương của (BYH) và (CZH) .