

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH**

**ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2022-2023
Môn : TOÁN CHUYÊN**

DÀNH CHO CÁC LỚP CHUYÊN TỰ NHIÊN

Thời gian làm bài : 150 phút (không kể giao đề)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

- 1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $A = \frac{2x-1}{\sqrt{3x-1}+2}$
- 2) Tìm tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng $y = 2x + 4$ với trục Ox
- 3) Biết hình tròn có chu vi là $8\pi cm$. Tính diện tích hình tròn đó
- 4) Cho hình trụ có chiều cao bằng $4cm$, diện tích một đáy bằng $36\pi cm^2$. Tính diện tích xung quanh hình trụ đó

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{3-\sqrt{x}}{1-x} - \frac{\sqrt{x}+3}{x+2\sqrt{x}+1} \right) : \frac{4}{x^2-2x+1} \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

- 1) Rút gọn biểu thức P
- 2) Tìm x sao cho $P+6=0$

Câu 3. (2,5 điểm)

1. Cho phương trình $x^2 - (m+2)x + m + 1 = 0$ (1) (với m là tham số)
 - a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt
 - b) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $x_1; x_2$ là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân
2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y + 2\sqrt{y(2x-1)} = 10 \\ y - \sqrt{y} + \sqrt{2x-1} = 6 \end{cases}$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại M . Gọi I là trung điểm của BC , D là điểm đối xứng với A qua OM , giao điểm của AB và OM là H

- 1) Chứng minh tứ giác $MAOI$ nội tiếp và $MD^2 = MB \cdot MC$
- 2) Giả sử tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OI tại F . Chứng minh MD là tiếp tuyến của đường tròn (O) và ba điểm A, D, F thẳng hàng.
- 3) Kẻ đường kính DK của đường tròn (O) . Gọi N là hình chiếu của A trên DK . Đường thẳng MK cắt AN tại E . Chứng minh E là trung điểm của AN

Câu 5. (1,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2 - 3x - 1 = 3x\sqrt{x}(\sqrt{1-x} - 1)^3$
2. Xét hai số thực x, y thay đổi luôn thỏa mãn điều kiện $x + y \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\sqrt{2(x^4 + y^4)} + \frac{8}{x+y} + 1$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

5) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $A = \frac{2x-1}{\sqrt{3x-1}+2}$

Biểu thức A xác định khi và chỉ khi $3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$

6) Tìm tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng $y = 2x + 4$ với trục Ox

Tọa độ điểm M là nghiệm hệ $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-2; 0)$

7) Biết hình tròn có chu vi là $8\pi \text{ cm}$. Tính diện tích hình tròn đó

Từ giả thiết ta có $2\pi R = 8\pi \Leftrightarrow R = 4(\text{cm})$

Vậy diện tích của hình tròn là $S = \pi R^2 = 4^2\pi = 16\pi (\text{cm}^2)$

8) Cho hình trụ có chiều cao bằng 4 cm , diện tích một đáy bằng $36\pi \text{ cm}^2$.

Tính diện tích xung quanh hình trụ đó

Gọi R là bán kính đáy. Từ giả thiết có $\pi R^2 = 36\pi \Leftrightarrow R = 6(\text{cm})$

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 6 \cdot 4 = 48\pi (\text{cm}^2)$

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{3-\sqrt{x}}{1-x} - \frac{\sqrt{x}+3}{x+2\sqrt{x}+1} \right) : \frac{4}{x^2-2x+1} \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

3) Rút gọn biểu thức P

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{3-\sqrt{x}}{1-x} - \frac{\sqrt{x}+3}{x+2\sqrt{x}+1} \right) : \frac{4}{x^2-2x+1} \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \\ &= \frac{(3-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+3)(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)^2}{4} \\ &= \frac{3+2\sqrt{x}-x+x+2\sqrt{x}-3}{4} \cdot (1-\sqrt{x}) = \frac{4\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{4} = \sqrt{x}-x \end{aligned}$$

4) Tìm x sao cho $P+6=0$

Với $x \geq 0, x \neq 1 \Rightarrow P = \sqrt{x}-x$. Khi đó

$$P+6=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-x+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -2(ktm) \\ \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9(tmdk) \end{cases}$$

Vậy $x=9$

Câu 3. (2,5 điểm)

3. Cho phương trình $x^2 - (m+2)x + m+1 = 0(1)$ (với m là tham số)

c) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

Phương trình (1) có $a+b+c=0$ nên pt (1) có hai nghiệm $x_1=1; x_2=m+1$

Khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m+1 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 0$

d) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $x_1; x_2$ là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân

Với $m \neq 0$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1=1; x_2=m+1$

Vì $x_1; x_2$ là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân nên $m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

Khi đó xảy ra hai trường hợp như sau :

Th1: Cạnh góc vuông có độ dài là x_1 thì độ dài cạnh huyền là x_2

Do tam giác vuông cân nên ta có $x_2 = x_1\sqrt{2} \Leftrightarrow m+1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}-1(tm)$

Th2: cạnh góc vuông có độ dài là x_2 thì x_1 là độ dài cạnh huyền

Do tam giác vuông cân nên ta có $x_1 = x_2\sqrt{2} \Leftrightarrow (m+1)\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow m = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} (tm)$

Vậy $m \in \left\{ -1 + \sqrt{2}; -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$

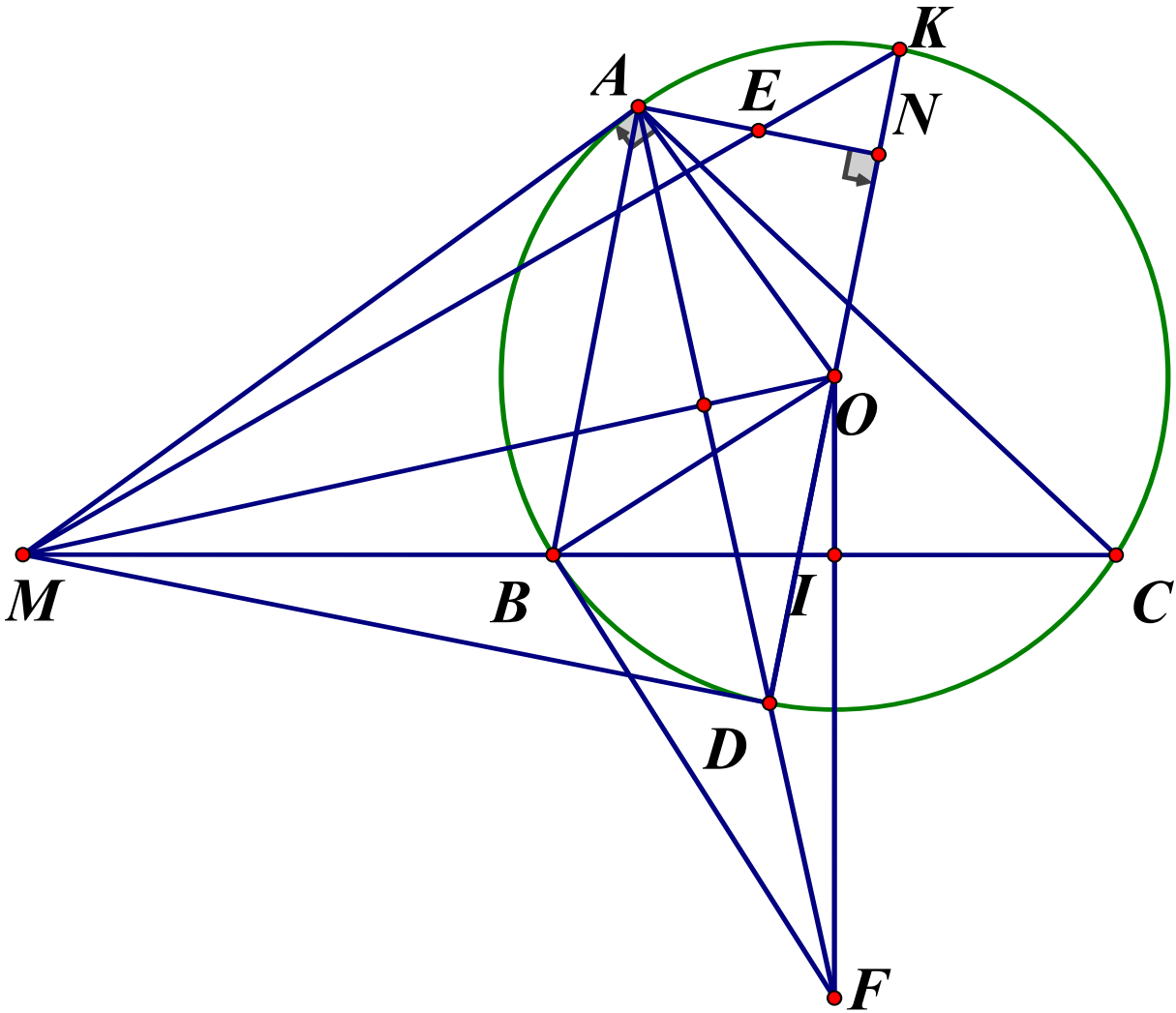
4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y + 2\sqrt{y(2x-1)} = 10 \\ y - \sqrt{y} + \sqrt{2x-1} = 6 \end{cases}$$

Điều kiện $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} (*) \\ y \geq 0 \end{cases}$ Ta có :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y + 2\sqrt{y(2x-1)} = 10 \\ y - \sqrt{y} + \sqrt{2x-1} = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2x-1} + \sqrt{y})^2 = 9 \\ y - \sqrt{y} + \sqrt{2x-1} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = 3 - \sqrt{y} \\ y - \sqrt{y} + 3 - \sqrt{y} = 6 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = 3 - \sqrt{y} \\ y - 2\sqrt{y} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{2x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} (tmdk(*)) \\ y = 9 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 9\right)$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại M . Gọi I là trung điểm của BC , D là điểm đối xứng với A qua OM , giao điểm của AB và OM là H



4) Chứng minh tứ giác $MAOI$ nội tiếp và $MD^2 = MB.MC$

Có MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A nên $MA \perp AO \Rightarrow \angle OAM = 90^\circ$ nên A thuộc đường tròn đường kính OM (1)

Mặt khác I là trung điểm của BC và BC là dây cung không đi qua tâm O nên $OI \perp BC \Rightarrow \angle OIM = 90^\circ$ nên I thuộc đường tròn có đường kính OM (2)

Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm M, A, O, I cùng thuộc một đường tròn hay tứ giác $MAOI$ nội tiếp

Trong đường tròn (O) có $\angle MAB = \angle ACM$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến dây cung cùng chắn cung AB)

Xét $\triangle MAB$ và $\triangle ACM$ có : $\angle MAB = \angle ACM$; $\angle AMC$ chung

$$\Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle MCA(g.g) \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB.MC \quad (3)$$

Lại có D là điểm đối xứng với A qua OM nên $MA = MD$ (4)

Từ (3) và (4) ta có : $MD^2 = MB.MC$

5) Giả sử tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OI tại F. Chứng minh MD là tiếp tuyến của đường tròn (O) và ba điểm A, D, F thẳng hàng.

Vì D là điểm đối xứng với A qua OM nên $OA = OD \Rightarrow D \in (O)$

Có $\triangle MAO = \triangle MDO \Rightarrow \angle MDO = \angle MAO = 90^\circ \Rightarrow MD \perp OD$

Khi đó ta có MD là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Có $AD \perp OM$ tại H (5)

Trong $\triangle OBF$ vuông có BI là đường cao nên $OB^2 = OI.OF \Rightarrow OA^2 = OI.OF$ (6)

Trong $\triangle OAM$ vuông có AH là đường cao nên $OA^2 = OH.OM$ (7)

Từ (6) và (7) ta có $OI.OF = OH.OM \Rightarrow \frac{OI}{OM} = \frac{OH}{OF}$

Xét $\triangle OMI$ và $\triangle OFH$ có $\angle MOF$ chung ; $\frac{OI}{OM} = \frac{OH}{OF} \Rightarrow \triangle OMI \sim \triangle OFH$ (cgc)

$\Rightarrow \angle OHF = \angle OIM = 90^\circ \Rightarrow FH \perp OM$ tại H (8)

Từ (5) và (8) suy ra A, D, F thẳng hàng

6) Kẻ đường kính DK của đường tròn (O). Gọi N là hình chiếu của A trên

DK. Đường thẳng MK cắt AN tại E. Chứng minh E là trung điểm của AN

Ta có $AN \parallel MD$ (vì cùng vuông góc với DK) $\Rightarrow \angle NAD = \angle ADM$

Có $\triangle MAD$ cân tại M $\Rightarrow \angle AMD = \angle MAD$

Suy ra $\angle DAN = \angle MAD \Rightarrow AD$ là tia phân giác trong tại A của $\triangle AME$

Ta có DK là đường kính, suy ra $\angle DAK = 90^\circ \Rightarrow AK \perp AD \Rightarrow AK$ là tia phân giác ngoài tại A của $\triangle AME$. Khi đó ta có : $\frac{KE}{KM} = \frac{AE}{AM}$

Sử dụng định lý Ta-let trong $\triangle KMD$ có $EN \parallel MD$ nên $\frac{KE}{KM} = \frac{EN}{MD}$

Do đó $\frac{AE}{AM} = \frac{EN}{MD}$ mà $MA = AD$ nên $AE = EN \Rightarrow E$ là trung điểm của AN

Câu 5. (1,0 điểm)

3. Giải phương trình $x^2 - 3x - 1 = 3x\sqrt{x}(\sqrt{1-x} - 1)^3$

ĐKXD: $0 \leq x \leq 1$ (*)

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của (1) nên ta chia cả hai vế của (1) cho $x^3 \neq 0$ ta

có: $(1) \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 3 \left(\sqrt{\frac{1}{x}} - 1 - \sqrt{\frac{1}{x}} \right)^3$

Đặt $t = \frac{1}{x} \geq 1$ thì phương trình trở thành :

$1 - 3t^2 - t^3 = 3(\sqrt{t-1} - \sqrt{t})^3 \Leftrightarrow (t^3 + 3t^2 - 1)(\sqrt{t} + \sqrt{t-1})^3 = 3(2)$

$$\text{Vì } t \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} t^3 + 3t^2 - 1 \geq 3 \\ (\sqrt{t} + \sqrt{t-1})^3 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow (t^3 + 3t^2 - 1)(\sqrt{t} + \sqrt{t-1})^3 \geq 3$$

$$\text{Khi đó (2)} \Leftrightarrow t = 1(\text{tmdk}) \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1(\text{tmdk})$$

Vậy $x = 1$

4. Xét hai số thực x, y thay đổi luôn thỏa mãn điều kiện $x + y \geq 2$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\sqrt{2(x^4 + y^4)} + \frac{8}{x+y} + 1$

$P \geq 4(x^2 + y^2) + \frac{8}{x+y} + 1$. Đặt $t = x + y (t \geq 2)$. Suy ra :

$$P \geq 2t^2 + \frac{8}{t} + 1 = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{4}{t} + \frac{4}{t} \right) + \frac{3t^2}{2} + 1$$

Áp dụng BĐT Co si cho 3 số dương ta có :

$$\frac{t^2}{2} + \frac{4}{t} + \frac{4}{t} \geq 3\sqrt{\frac{t^2}{2} \cdot \frac{4}{t} \cdot \frac{4}{t}} = 6. \text{ Mặt khác } t \geq 2 \Rightarrow \frac{3t^2}{2} \geq 6. \text{ Do đó } P \geq 6 + 6 + 1 = 13$$

Vậy $\text{Min } P = 13 \Leftrightarrow x = y = 1$