

Bài 1: (5 điểm)

Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$, chứng minh rằng

$$9 \leq (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq 10.$$

Bài 2: (5 điểm)

Với mỗi số nguyên dương n , xét đa thức: $P_n(x) = x^n + (x - 1)^n - (x + 1)^n$.

a. Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương, đa thức $P_n(x)$ có duy nhất một nghiệm dương, ký hiệu là r_n , và $r_n < r_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{n}$.

Bài 3: (5 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có $AB > BC$. Các điểm M, N lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC sao cho $AM = CN$. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng MN và AC , P và Q lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AMK và tâm đường tròn bàng tiếp góc K của tam giác CNK . Gọi S là điểm chính giữa cung ABC của (C) . Chứng minh rằng $SP = SQ$.

Bài 4: (5 điểm)

a. Cho các số nguyên dương a, k với $a \geq 2$. Chứng minh rằng $k \mid \varphi(a^k - 1)$, trong đó φ là phi hàm Euler.

b. Cho số nguyên $m \geq 2$ và p là một số nguyên tố không là ước của m nhưng p là ước của $\varphi(m)$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên tố q sao cho $q \equiv 1 \pmod{p}$.

c. Cho p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng có vô hạn số nguyên tố dạng $pk + 1$.

————— **HẾT** —————

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Chữ ký của cán bộ coi thi 1:..... Chữ ký của cán bộ coi thi 2:.....