

Câu 1: (4,0 điểm)

a) Cho $x + \sqrt{5} = -2$. Tính giá trị của biểu thức $A = 7(x^2 + 4x)^{2024} - 6(x^2 + 4x)^{2023} + 2023$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

Câu 2: (2,5 điểm)

Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $(d_1): y = x + 3$, $(d_2): y = -2x + m^2 + m - 18$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ cắt nhau tại điểm có hoành độ bằng 0.

Câu 3: (3,0 điểm)

Giải phương trình sau: $2(x^2 + 4x - 5) + \sqrt{x^2 + 4x} + 7 = 0$

Câu 4: (2,0 điểm)

Cho hình chữ nhật $MNPQ$ có $MN = 4\text{cm}$ và $MP = 5\text{cm}$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ P đến NQ . Tính diện tích tam giác NPQ và độ dài đoạn thẳng HN .

Câu 5: (3,0 điểm)

Cho hình thang $ABCD$ vuông ở đỉnh A và đỉnh B thỏa mãn $AD = 2AB = 2BC$. Biết $BC = \sqrt{5}\text{cm}$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BD .

a) Tính độ dài đoạn CH .

b) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng HD . Đường thẳng AM và BC cắt nhau tại điểm E .

Chứng minh rằng: $CM \perp AE$.

Câu 6: (2,0 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Câu 7: (2,0 điểm)

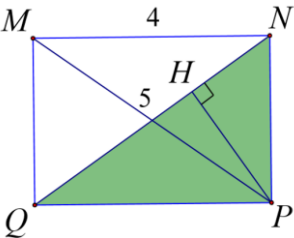
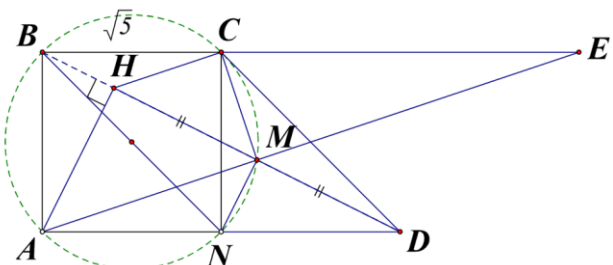
Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 7x - 12 = 0$

Câu 8: (1,5 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{2a+b+3c} + \frac{ca}{3a+2b+c} \leq \frac{a+b+c}{6}$$

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
1a	a) Cho $x + \sqrt{5} = -2$. Tính giá trị của biểu thức $A = 7(x^2 + 4x)^{2024} - 6(x^2 + 4x)^{2023} + 2023$.	2,0
	$A = 7(x^2 + 4x)^{2024} - 6(x^2 + 4x)^{2023} + 2023.$ $x + \sqrt{5} = -2 \Rightarrow \sqrt{5} = -(x + 2)$ $\Rightarrow 5 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^2 + 4x = 1$ $A = 7 \cdot 1^{2024} - 6 \cdot 1^{2023} + 2023 = 2024$	
1b	b) Rút gọn biểu thức $B = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.	2,0
	$B = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}; x > 0, x \neq 1.$ $B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$ $B = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (2\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}+1)$ $= x - \sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 1 + 2\sqrt{x} + 2$ $= x - \sqrt{x} + 1$	
2	Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $(d_1): y = x + 3$, $(d_2): y = -2x + m^2 + m - 18$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ cắt nhau tại điểm có hoành độ bằng 0.	2,5
	Hoành độ giao điểm của $(d_1), (d_2)$ là nghiệm của phương trình: $x + 3 = -2x + m^2 + m - 18 \Leftrightarrow x = \frac{m^2 + m - 21}{3}$ $(d_1), (d_2)$ cắt nhau tại điểm tại điểm có hoành độ bằng 0 khi $x = \frac{m^2 + m - 21}{3} = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 21 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{85}}{2}$ KL: $m = \frac{-1 \pm \sqrt{85}}{2}$	
3	Giải phương trình sau: $2(x^2 + 4x - 5) + \sqrt{x^2 + 4x} + 7 = 0$ (1)	3,0
	ĐK: $x^2 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow x(x+4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -4 \end{cases}$	

	- Đặt: $t = \sqrt{x^2 + 4x} (t \geq 0) \Rightarrow x^2 + 4x = t^2$, thay vào pt(1) ta được : $2(t^2 - 5) + t + 7 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0$ có $a + b + c = 2 + 1 - 3 = 0$ nên pt có hai nghiệm: $t = 1$ (thỏa đk); $t = -\frac{3}{2}$ (không thỏa đk) Với $t = 1 \Rightarrow x^2 + 4x = 1 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 5 \Leftrightarrow x + 2 = \pm\sqrt{5} \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{5}$ (thỏa đk) Vậy: Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}$	
4	Cho hình chữ nhật $MNPQ$ có $MN = 4\text{cm}$ và $MP = 5\text{cm}$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ P đến NQ. Tính diện tích tam giác NPQ và độ dài đoạn thẳng HN.	2,0
		
	- $\triangle MNP$ vuông tại N nên $NP = \sqrt{MP^2 - MN^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{cm}$ - $\triangle NPQ$ vuông tại P có $QP = 4\text{cm}$; $NP = 3\text{cm}$ $S_{NPQ} = \frac{1}{2} QP \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6\text{cm}^2$ - $\triangle NPQ$ vuông tại P có PH là đường cao, $NQ = MP = 5\text{cm}$ nên $NP^2 = HN \cdot NQ \Rightarrow HN = \frac{NP^2}{NQ} = \frac{3^2}{5} = 1,8\text{cm}$	
5	Cho hình thang $ABCD$ vuông ở đỉnh A và đỉnh B thỏa mãn $AD = 2AB = 2BC$. Biết $BC = \sqrt{5}\text{cm}$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BD. a) Tính độ dài đoạn CH.	3,0
		
	Gọi M là trung điểm của đoạn HD, N là trung điểm của AD, ta có $AN = BC = \frac{1}{2}AD$ và $AN \parallel BC$ nên tứ giác $ABCN$ là hình bình hành Mặt khác: $AB = BC = \frac{1}{2}AD$, $A = 90^\circ$ Do đó tứ giác $ABCN$ là hình vuông,	

	suy ra tứ giác ABCN nội tiếp đường tròn đường kính BN. (1) ΔAHD có MN là đường trung bình ($HM=MD$, $AN=ND$) $\Rightarrow MN // AH$ Mà $AH \perp BD$ nên $MN \perp BD$ Tứ giác ABMN có $BAN + BMN = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ Suy ra tứ giác ABMN nội tiếp đường tròn đường kính BN (2) Từ (1) và (2) suy ra năm điểm A, B, C, M, N cùng thuộc đường tròn đường kính BN ΔABD vuông tại A, có đường cao AH, $AB = BC = \sqrt{5}$; $AD = 2BC = 2\sqrt{5}$ $\Rightarrow BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{5 + 20} = 5 \text{ cm}$ $\Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BD} = \frac{5}{5} = 1 \text{ cm}$; $AH = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{5} = 2 \text{ cm}$; $HD = 4 \text{ cm}$ ΔAHD có MN là đường trung bình nên $MN = \frac{1}{2}AH = 1 \text{ cm}$ ΔBHC và ΔNMC có: $BC = NC$, $BH = MN = 1 \text{ cm}$; $\angle MBC = \angle MNC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC) $\Rightarrow \Delta BHC = \Delta NMC \Rightarrow HC = MC$; $\angle BCH = \angle NCM$ ΔAHD có MN là đường trung bình $MN = \frac{1}{2}AH = 1 \text{ cm}$ ΔBHC và ΔNMC có: $BC = NC$, $BH = MN = 1 \text{ cm}$; $\angle MBC = \angle MNC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC) $\Rightarrow \Delta BHC = \Delta NMC \Rightarrow HC = MC$; $\angle BCH = \angle NCM$ Mặt khác $\angle BCH + \angle HCN = 90^\circ \Rightarrow \angle NCM + \angle HCN = 90^\circ$ hay $\angle HCM = 90^\circ$ Suy ra ΔHCM vuông cân tại C có $HC = HM \cdot \sin \angle HMC = \frac{HD}{2} \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ cm}$	
	b) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng HD. Đường thẳng AM và BC cắt nhau tại điểm E. Chứng minh rằng: $CM \perp AE$.	
	Theo chứng minh trên, ta có tứ giác ABCM nội tiếp đường tròn đường kính BN $\angle ABC + \angle AMC = 180^\circ$, mà $\angle ABC = 90^\circ \Rightarrow \angle AMC = 90^\circ$ Do đó $CM \perp AE$	
6	Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{4x+3}{x^2+1}$	2,0
	Cách 1: Ta có: $C = \left(\frac{4x+3}{x^2+1} + 1 \right) - 1 = \frac{x^2+4x+4}{x^2+1} - 1 = \frac{(x+2)^2}{x^2+1} - 1$ Vì $(x+2)^2 \geq 0$, $x^2+1 > 0$ với mọi x nên $C \geq -1$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ Vậy: $\min C = -1$ khi $x = -2$	

	Cách 2: $C = \frac{4x+3}{x^2+1} \Leftrightarrow Cx^2 - 4x + C - 3 = 0$ -Nếu $C = 0: (*) \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$ -Nếu $C \neq 0: pt(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4 - C(C - 3) \geq 0$ $\Leftrightarrow C^2 - 3C - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (C + 1)(C - 4) \leq 0$ $\Leftrightarrow -1 \leq C \leq 4$ $C = -1$ khi $x = -2$ Vậy: $\min C = -1$ khi $x = -2$	
7	Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 7x - 12 = 0$	2,0
	Cách 1: Xét phương trình bậc hai ẩn $y: y^2 + 2xy - 7x - 12 = 0$ có $\Delta_x = (2x)^2 - 4(-7x - 12) = (2x + 7)^2 - 1$ Để pt (1) có nghiệm là số nguyên thì Δ_x phải là số chính phương, khi đó: $(2x + 7)^2 - 1 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N})$ $\Leftrightarrow (2x + 7 + k)(2x + 7 - k) = 1$ Vì $x \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$ nên ta có các trường hợp sau: - TH1: $\begin{cases} 2x + 7 + k = 1 \\ 2x + 7 - k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ k = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -3$ - TH2: $\begin{cases} 2x + 7 + k = -1 \\ 2x + 7 - k = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ k = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -4$ +Với $x = -3: (1) \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 0 \Leftrightarrow y = 3$ (thỏa đk) +Với $x = -4: (1) \Rightarrow y^2 - 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow y = 4$ (thỏa đk) Vậy: Phương trình có hai nghiệm nguyên là $(-3; 3); (-4; 4)$ Cách 2: Xét phương trình bậc hai ẩn $y: y^2 + 2xy - 7x - 12 = 0$ $y^2 + 2xy - 7x - 12 = 0$ $\Leftrightarrow 4y^2 + 8xy - 28x - 48 = 0$ $\Leftrightarrow (4y^2 + 8xy + 4x^2) - (4x^2 + 28x + 49) + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (2x + 2y)^2 - (2x + 7)^2 = -1$ $\Leftrightarrow (4x + 2y + 7)(2y - 7) = -1$ Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên ta có các trường hợp sau:	

	$\begin{cases} 4x+2y+7=1 \\ 2y-7=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x+2y+7=-1 \\ 2y-7=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=4 \end{cases}$	
8	Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{2a+b+3c} + \frac{ca}{3a+2b+c} \leq \frac{a+b+c}{6}$	1,5
	BĐT: Cho 3 số dương x, y, z ta có $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$ hay $\frac{1}{x+y+z} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ Thật vậy: Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương x, y, z ta có: $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \Rightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$ Áp dụng BĐT trên ta có: $\frac{1}{a+3b+2c} = \frac{1}{(a+c)+(b+c)+2b} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b}\right)$ $\Rightarrow \frac{ab}{a+3b+2c} \leq \frac{ab}{9}\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{a}{2}\right)$ Chứng minh tương tự ta được: $\frac{bc}{2a+b+3c} \leq \frac{bc}{9}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{2c}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} + \frac{b}{2}\right)$ $\frac{ca}{3a+2b+c} \leq \frac{ca}{9}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{ca}{a+b} + \frac{ca}{b+c} + \frac{c}{2}\right)$ Suy ra: $\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{2a+b+3c} + \frac{ca}{3a+2b+c} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{bc+ca}{a+b} + \frac{ab+ac}{b+c} + \frac{bc+ab}{c+a} + \frac{a+b+c}{2}\right) = \frac{a+b+c}{6}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$	