

Câu 1. (5,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 > 2025 \\ 2024u_{n+1} - 2023u_n = \frac{2025^{2024}}{u_n^{2023}}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Câu 2. (5,0 điểm)

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn điều kiện:

$$P^3(x) = P(x^3 + x - 1) + \frac{3}{2}P^2(2x - 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu 3. (5,0 điểm)

Tìm tất cả các tập hợp A gồm 8 số nguyên dương sao cho với mọi số nguyên dương $n \leq 250$, tồn tại tập hợp B là tập hợp con của tập hợp A thỏa mãn tổng tất cả các phân tử của B bằng n .

Câu 4. (5,0 điểm)

Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) . Lấy điểm P di động trên (O) (P không trùng với các điểm A, B, C) sao cho hai đường thẳng AP và BC cắt nhau tại D . Gọi T là điểm đối xứng của D qua trung điểm M của đoạn BC . Đường thẳng AT cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PDT tại điểm thứ hai là G . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AGP cắt các đường thẳng AB, AC và AM theo thứ tự tại các điểm là E, F và N tương ứng (E, F, N khác A).

a) Chứng minh ba điểm D, E và F thẳng hàng.

b) Hai đường thẳng EF và GP cắt nhau tại Q . Chứng minh QN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AGP .

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

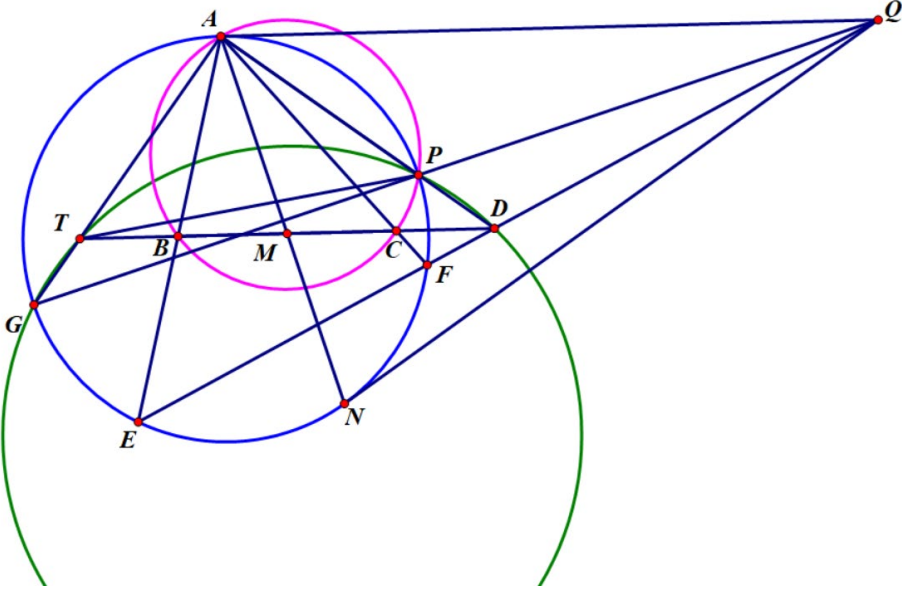
Họ và tên:Số báo danh:

ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM
(gồm 04 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
1 (5đ)	Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 > 2025 \\ 2024u_{n+1} - 2023u_n = \frac{2025^{2024}}{u_n^{2023}}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$ Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn của nó.	
	$u_{n+1} = \frac{1}{2024} \left(2023u_n + \frac{2025^{2024}}{u_n^{2023}} \right).$ Ta chứng minh $u_n > 2025, \forall n \in \mathbb{N}^*.$	0,5
	Với $n=1$ thì $u_1 > 2025.$ Giả sử $u_k > 2025, k \in \mathbb{N}^*$ Áp dụng BĐT AM-GM cho 2024 số dương: $2023u_k + \frac{2025^{2024}}{u_k^{2023}} = u_k + u_k + \dots + u_k + \frac{2025^{2024}}{u_k^{2023}} \geq 2024.2025$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow u_k = 2025$: vô lí $\Rightarrow u_{k+1} > 2025$ Do đó $u_n > 2025, \forall n \in \mathbb{N}^*$	1,5
	Xét $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2024} \left(2023 + \frac{2025^{2024}}{u_n^{2024}} \right) < \frac{1}{2024} (2023 + 1) = 1$	1
	Do đó (u_n) là dãy giảm và bị chặn dưới, suy ra (u_n) có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim u_n = a$	1
	Từ $2024u_{n+1} - 2023u_n = \frac{2025^{2024}}{u_n^{2023}}$, chuyển qua giới hạn ta được $2024a - 2023a = \frac{2025^{2024}}{a^{2023}} \Leftrightarrow a = 2025.$ Vậy $\lim u_n = 2025.$	1
2 (5đ)	Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn điều kiện: $P^3(x) = P(x^3 + x - 1) + \frac{3}{2}.P^2(2x - 1), \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$	

	+ Nếu $P(x) = c$ từ giả thiết ta được $c^3 = c + \frac{3}{2}c^2 \Leftrightarrow 2c^3 - 3c^2 - 2c = 0 \Leftrightarrow c(c-2)(2c+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 2 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$ Suy ra $P(x) = 0, P(x) = 2, P(x) = -\frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.	1
	+ Nếu $\deg P(x) \geq 1$, xét hệ phương trình $\begin{cases} x = 2x - 1 \\ x = x^3 + x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = x_0 = 1$ Khi đó $P(x_0) = c$, với $c \in \left\{0, 2, -\frac{1}{2}\right\}$	0,5
	Đặt $P(x) = (x - x_0)^n Q(x) + c$, với $Q(x_0) \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Thay vào (1) ta được: $2\left[(x - x_0)^n Q(x) + c\right]^3 = 2\left[(x^3 + x - 1 - x_0)^n Q(x^3 + x - 1) + c\right] +$ $+ 3\left[(2x - 1 - x_0)^n Q(2x - 1) + c\right]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ $2(x - x_0)^{3n} Q^3(x) + 6c(x - x_0)^{2n} Q^2(x) + 6c^2(x - x_0)^n Q(x) + 2c^3$ $= 2(x^3 + x - 1 - x_0)^n Q(x^3 + x - 1) + 2c + 3(2x - 1 - x_0)^{2n} Q^2(2x - 1) +$ $+ 6c(2x - 1 - x_0)^n Q(2x - 1) + 3c^2$	0,5
	Chú ý rằng $2c^3 = 2c + 3c^2$ và $\begin{cases} x = 2x - 1 \\ x = x^3 + x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = x_0 = 1$ nên $2x - 1 - x_0 = 2x - 2x_0 = 2(x - x_0)$ $x^3 + x - 1 - x_0 = x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2) = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2 + 1)$	0,5
	$\Leftrightarrow 2(x - x_0)^{2n} Q^3(x) + 6c(x - x_0)^n Q^2(x) + 6c^2 Q(x)$ $= 2(x^2 + xx_0 + x_0^2 + 1)^n Q(x^3 + x - 1) + 3.4^n (x - x_0)^n Q^2(2x - 1) + 6c.2^n Q(2x - 1)$	0,5
	Thay $x = x_0$ ta được $6c^2 Q(x_0) = 2(3x_0^2 + 1)^n Q(x_0^3 + x_0 - 1) + 6c.2^n Q(2x_0 - 1)$	0,5
	$\Rightarrow 3c^2 - 3c.2^n = (3x_0^2 + 1)^n, (2)$	0,5
	Với $c = 0, c = 2, c = -\frac{1}{2}$ và $x_0 = 1$ thì đẳng thức (2) không tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ Vậy tất cả các đa thức cần tìm là $P(x) = 0, P(x) = 2, P(x) = -\frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$	1

3 (5d)	Tìm tất cả các tập hợp A gồm 8 số nguyên dương sao cho với mọi số nguyên dương $n \leq 250$, tồn tại tập B là con của tập A thỏa mãn tổng tất cả các phần tử của B bằng n.	
	Nếu tập A chứa ba phần tử x, y, z thỏa mãn $x + y = z$ thì các tập hợp có dạng $C \cup \{x; y\}$ và $C \cup \{z\}$ cho ta các tổng giống nhau với mọi $C \subset A \setminus \{x; y; z\}$. Khi đó A cho tối đa $2^8 - 1 - 2^5 = 233$ tổng khác 0: vô lí. Do đó tập A không chứa ba phần tử x, y, z mà $x + y = z$ (1). Tương tự nếu tập A chứa bốn phần tử x, y, z, t thỏa mãn $x + y + z = t$ thì A cho tối đa $2^8 - 1 - 2^4 = 239$ tổng khác 0: vô lí. Do đó tập A không chứa bốn phần tử x, y, z, t mà $x + y + z = t$ (2). Tương tự tập A không chứa năm phần tử x, y, z, t, w mà $x + y + z + t = w$ (3).	1
	Để $n = 1, n = 2$ viết được dưới dạng tổng thì 1 và 2 phải thuộc A. Từ (1) suy ra 3 phải không thuộc A, do đó 4 phải thuộc A. Từ (1), (2) suy ra 5; 6; 7 không thuộc A, do đó 8 phải thuộc A. Từ (1), (2), (3) suy ra các số từ 9 đến 15 không thuộc A, do đó 16 phải thuộc A, dẫn đến các số từ 17 đến 30 không thuộc A.	1
	Do $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ nên phần tử tiếp theo của A không được vượt quá 32, ta gọi phần tử này là $32 - a$ với $a \in \{0; 1\}$. Khi đó ta có thể viết các số từ 1 đến $63 - a$ dưới dạng tổng. Suy ra phần tử tiếp theo phải có dạng $64 - a - b$ với $b \in \mathbb{N}$.	1
	Tương tự ta tìm được $A = \{1; 2; 4; 8; 16; 32 - a; 64 - a - b; 128 - 2a - b - c\}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}$ thỏa tổng lớn nhất $255 - 4a - 2b - c \geq 250 \Leftrightarrow 4a + 2b + c \leq 5$.	1
	Có 14 bộ $(a; b; c)$ thỏa mãn là $(0; 0; i)$ với $i = \overline{0; 5}$; $(0; 1; j)$ với $j = \overline{0; 3}$; $(0; 2; 0)$; $(0; 2; 1)$; $(1; 0; 0)$; $(1; 0; 1)$.	1
4 (5d)	Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm P di động trên (O) (P không trùng với các điểm A, B, C) sao cho hai đường thẳng AP và BC cắt nhau tại D. Gọi T là điểm đối xứng của D qua trung điểm M của đoạn BC. Đường thẳng AT cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PDT tại điểm thứ hai là G. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AGP cắt các đường thẳng AB, AC và AM theo thứ tự tại các điểm là E, F và N tương ứng (E, F, N khác A). a) Chứng minh ba điểm D, E và F thẳng hàng. b) Hai đường thẳng EF và GP cắt nhau tại Q. Chứng minh QN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AGP.	

	 a) $(FC, FG) \equiv (FA, FG) \equiv (PA, PG) \equiv (PD, PG) \equiv (TD, TG) \equiv (TC, TG) \pmod{\pi}$ nên 4 điểm T, G, C, F đồng viên	0,5
	$(CB, CF) \equiv (CT, CF) \equiv (GT, GF) \equiv (GA, GF) \equiv (EA, EF) \equiv (EB, EF) \pmod{\pi}$ nên 4 điểm B, C, E, F đồng viên.	0,5
	Xét trục đẳng phương của các đường tròn (O), (BCE), (APG) có BC, EF, AP đồng quy. Do đó D, E và F thẳng hàng.	1
	b) Có A là tâm đẳng phương của ba đường tròn (PDT), $(BCFE)$, $(GTCF)$	0,5
	Q là tâm đẳng phương của ba đường tròn (PDT), $(BCFE)$, (AFE)	0,5
	Nên AQ là trục đẳng phương của hai đường tròn (PTD), $(BCFE) \Rightarrow AQ$ vuông góc với đường nối tâm của hai đường tròn (PTD), $(BCFE)$. Mà đường nối tâm của hai đường tròn (PTD), $(BCFE)$ là trung trực của $BC \Rightarrow AQ \parallel BC$	0,5
	$(AP, AQ) \equiv (DA, DT) \equiv (DP, DT) \equiv (GP, GT) \equiv (GP, GA) \pmod{\pi} \Rightarrow AQ \text{ là tiếp tuyến của } (AGP)$	0,5
	Do EF là đối song của BC và M là trung điểm của đoạn BC nên AM là đường đối trung góc A của tam giác $AEF \Rightarrow AENF$ là tứ giác điều hòa mà E, F, Q thẳng hàng $\Rightarrow QN$ là tiếp tuyến của (AGP)	1

HƯỚNG DẪN CHẤM

1. Điểm bài thi đánh giá theo thang điểm từ 0 đến 20. Điểm của bài thi là tổng của các điểm thành phần và không làm tròn.

2. Học sinh giải theo cách khác nếu đúng và hợp lí vẫn cho điểm tối đa phần đó.

----- Hết -----