

Câu I (4,0 điểm).

1. Rút gọn biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{xy} - 2y} + \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{y}} \cdot \frac{2}{1 - \sqrt{x}}, \text{ với } x \geq 0; y > 0; x \neq 4y; x \neq 1.$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1$. Tính giá trị biểu thức $Q = \sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} - \sqrt{abc} + 2020$.

Câu II (4,0 điểm).

1. Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 6x - 6} = 3\sqrt{(2-x)^5} + (7x-19)\sqrt{2-x}$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + \frac{x^2}{y} = 6 - \frac{2}{y} \\ x^4 + 2x^2 + \frac{x^2}{y} = 12 - \frac{y+1}{y^2} \end{cases}$$

Câu III (4,0 điểm).

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn phương trình

$$\frac{4}{a} + \sqrt[3]{4-b} = \sqrt[3]{4+4\sqrt{b}+b} + \sqrt[3]{4-4\sqrt{b}+b}.$$

2. Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a-b$ là số nguyên tố và $ab+bc+ca=3c^2$.

Chứng minh $8c+1$ là số chính phương.

Câu IV (6,0 điểm).

Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và C là điểm thay đổi trên nửa đường tròn đó (C khác A và B). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ các tia tiếp tuyến Ax và By . Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn cắt các tia Ax, By theo thứ tự tại D, E . Gọi I là giao điểm của AE và BD, CI cắt AB tại H .

- Chứng minh CH song song với BE và I là trung điểm của đoạn thẳng CH .
- Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại K . Chứng minh rằng $KA \cdot KB = CH \cdot CO$.
- Qua C vẽ đường thẳng song song với AB cắt tia By tại F . Gọi M là giao điểm của AF và BC . Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn $(O; R)$ sao cho tam giác ABM có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó theo R .

Câu V (2,0 điểm).

Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{1+ab} + \frac{ab}{1+a} + \frac{ab}{1+b} + \frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab} \geq 3.$$

Lời giải. Nguyễn Ngọc Hùng – THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh

Bài 1. a) Rút gọn biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{xy} - 2y} + \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{y}} \cdot \frac{2}{1 - \sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0; y > 0; x \neq 4y; x \neq 1$$

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1$. Tính giá trị của biểu thức $Q = \sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} - \sqrt{abc} + 2020$

Lời giải. a) Ta có $P = \frac{x}{\sqrt{y}(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})} + \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{x})}$

$$= \frac{x}{\sqrt{y}(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})} + \frac{-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})}{\sqrt{y}(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

b) Ta có $\sqrt{(1-b)(1-c)} = \sqrt{1 - (b+c) + bc} = \sqrt{a + 2\sqrt{abc} + bc} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{bc})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{bc}$

Tương tự ta cũng có $\sqrt{(1-c)(1-a)} = \sqrt{b} + \sqrt{ca}$; $\sqrt{(1-a)(1-b)} = \sqrt{c} + \sqrt{ab}$

Do đó $Q = a + \sqrt{abc} + b + \sqrt{abc} + c + \sqrt{abc} - \sqrt{abc} + 2020 = 2021$

Bài 2. a) Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 6x - 6} = 3\sqrt{(2-x)^5} + (7x-19)\sqrt{2-x}$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + \frac{x^2}{y} = 6 - \frac{2}{y} \\ x^4 + 2x^2 + \frac{x^2}{y} = 12 - \frac{y+1}{y^2} \end{cases}$$

Lời giải. a) ĐKXD: $\begin{cases} 3x^2 - 6x - 6 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 \geq 3 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1 - \sqrt{3}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x - 6} = a \geq 0 \\ \sqrt{2-x} = b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x - 6 = a^2 \\ 2-x = b^2 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 5x - 7 = a^2 - b^2 + 1$

Ta có $\sqrt{3x^2 - 6x - 6} = 3\sqrt{(2-x)^5} + (7x-19)\sqrt{2-x}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 6x - 6} = \sqrt{2-x} [3(2-x)^2 + 7x - 19] \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 6x - 6} = (3x^2 - 5x - 7)\sqrt{2-x}$$

$$\Rightarrow a = (a^2 - b^2 + 1)b \Leftrightarrow (a-b)(ab + b^2 - 1) = 0$$

Xét $a-b=0 \Rightarrow \sqrt{3x^2 - 6x - 6} = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$ (loại); $x = -1$ (thỏa mãn)

Xét $ab + b^2 - 1 = 0$. Do $x \leq 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow 2-x \geq \sqrt{3} + 1 > 1 \Rightarrow ab + b^2 - 1 > 0$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$

b) ĐKXD: $y \neq 0$. Cộng theo vế các phương trình của hệ ta có

$$x^4 + 3x^2 + \frac{2x^2}{y} = 18 - \frac{3}{y} - \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow x^4 + \frac{x^2}{y} - 3x^2 + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^2} - \frac{3}{y} + 6x^2 + \frac{6}{y} - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \left(x^2 + \frac{1}{y} - 3 \right) + \frac{1}{y} \left(x^2 + \frac{1}{y} - 3 \right) + 6 \left(x^2 + \frac{1}{y} - 3 \right) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{y} - 3 \right) \left(x^2 + \frac{1}{y} + 6 \right) = 0$$

Xét $x^2 + \frac{1}{y} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} = 3 - x^2$ thay vào phương trình $x^2 + \frac{x^2}{y} = 6 - \frac{2}{y}$ được

$$x^2 + x^2(3 - x^2) = 6 - 2(3 - x^2) \Leftrightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm\sqrt{2}$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$. Với $x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Rightarrow y = 1$ (TMĐK)

Xét $x^2 + \frac{1}{y} + 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} = -6 - x^2$ thay vào phương trình $x^2 + \frac{x^2}{y} = 6 - \frac{2}{y}$ được

$$x^2 + x^2(-6 - x^2) = 6 - 2(-6 - x^2) \Leftrightarrow x^4 + 7x^2 + 18 = 0 \text{ vô nghiệm}$$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $(x; y) \in \left\{ \left(0; \frac{1}{3} \right); (-\sqrt{2}; 1); (\sqrt{2}; 1) \right\}$

Bài 3. a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a; b)$ thỏa mãn

$$\frac{4}{a} + \sqrt[3]{4-b} = \sqrt[3]{4+4\sqrt{b}+b} + \sqrt[3]{4-4\sqrt{b}+b}$$

b) Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a - b$ là số nguyên tố và $ab + bc + ca = 3c^2$
Chứng minh rằng $8c + 1$ là số chính phương.

Lời giải. a) Đặt $\sqrt[3]{2+\sqrt{b}} = x; \sqrt[3]{2-\sqrt{b}} = y$. Vì $x > 0$ nên $x^2 + y^2 - xy = \frac{3}{4}x^2 + \left(\frac{x}{2} - y\right)^2 > 0$

$$\text{Ta có } \frac{4}{a} + \sqrt[3]{4-b} = \sqrt[3]{4+4\sqrt{b}+b} + \sqrt[3]{4-4\sqrt{b}+b} \Rightarrow \frac{x^3 + y^3}{a} + xy = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)(x^2 + y^2 - xy)}{a} = x^2 + y^2 - xy \Leftrightarrow x + y = a \Rightarrow \sqrt[3]{2+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{b}} = a$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{b}} \right)^3 = a^3 \Leftrightarrow 4 + 3a\sqrt[3]{4-b} = a^3 \Leftrightarrow 4-b = \left(\frac{a^3 - 4}{3a} \right)^3$$

Vì b là số nguyên nên $(a^3 - 4) : 3a \Rightarrow (a^3 - 4) : a \Rightarrow 4 : a \Rightarrow a \in \{1; 2; 4\}$

Với $a = 1 \Rightarrow 4 - b = 1 \Leftrightarrow b = 5$. Với $a = 2$ hoặc $a = 4$ thì b không là số nguyên

Thử lại ta có $(a; b) = (1; 5)$ thỏa mãn bài toán

b) Ta có $ab + bc + ca = 3c^2 \Leftrightarrow ab + bc + ca + c^2 = 4c^2 \Leftrightarrow (a+c)(b+c) = 4c^2$ (*)

$$\text{Giả sử } (a+c; b+c) = d \Rightarrow \begin{cases} (a+c) : d \\ (b+c) : d \end{cases} \Rightarrow (a-b) : d, \text{ vì } a-b \text{ là số nguyên tố nên } \begin{cases} d = 1 \\ d = a-b \end{cases}$$

$$\text{Xét } d = a - b. \text{ Suy ra tồn tại } x, y \in \mathbb{N} \text{ sao cho } \begin{cases} a+c = (a-b)x \\ b+c = (a-b)y \end{cases} \Leftrightarrow a-b = (a-b)(x-y)$$

$$\Leftrightarrow x-y=1 \Leftrightarrow x=y+1, \text{ thay vào (*) ta có } y(y+1)(a-b)^2 = (2c)^2 \Rightarrow y(y+1) \text{ là số chính}$$

phương, mà y và $y+1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên $y=0 \Rightarrow b+c=0 \Rightarrow 4c^2=0 \Leftrightarrow c=0$

Khi đó $8c+1=1$ là số chính phương

$$\text{Xét } d=1. \text{ Suy ra tồn tại } m, n \in \mathbb{N} \text{ sao cho } \begin{cases} a+c=m^2 \\ b+c=n^2 \end{cases} \Leftrightarrow a-b=m^2-n^2=(m-n)(m+n)$$

là số nguyên tố, mà $m+n > m-n \Rightarrow m-n=1 \Leftrightarrow m=n+1$ kết hợp với (*) ta có $2c=mn=n(n+1)$

$$\Rightarrow 8c+1=4n(n+1)+1=(2n+1)^2 \text{ là số chính phương}$$

Bài 4. Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB và C là điểm thay đổi trên nửa đường tròn đó (C khác A, B). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến Ax và By . Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn cắt các tia Ax, By theo thứ tự tại D, E . Gọi I là giao điểm của AE và BD , CI cắt AB tại H .

a) Chứng minh rằng CH song song với BE và I là trung điểm của CH .

b) Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại K .

Chứng minh rằng $KA \cdot KB = CH \cdot CO$

c) Qua C vẽ đường thẳng song song với AB cắt tia By tại F . Gọi M là giao điểm của AF và BC . Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) sao cho tam giác ABM có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó theo R .

Lời giải. a) Áp dụng định lý Thales ta có

$$\frac{CD}{CE} = \frac{DA}{BE} = \frac{DI}{BI} \Rightarrow CI \parallel BE \text{ hay } CH \parallel BE$$

$$\text{Mặt khác } \frac{CI}{DA} = \frac{EI}{EA} = \frac{BI}{BD} = \frac{HI}{DA}$$

$$\Rightarrow CI = HI \text{ hay } I \text{ là trung điểm của } CH$$

b) Đường tròn (J) nội tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc với AB, BC, CA lần lượt tại K, Q, P

Ta có $AB+AC-BC$

$$= (AK+BK) + (AP+CP) - (CQ+BQ)$$

$$= AK+BK+AK+CQ-CQ-BK=2AK$$

$$\Rightarrow 2AK=AB+AC-BC$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } 2BK=AB+BC-AC \Rightarrow 4AK \cdot BK = (AB+AC-BC)(AB+BC-AC)$$

$$= AB^2 + AB \cdot BC - AB \cdot AC + AC \cdot AB + AC \cdot BC - AC^2 - AB \cdot BC - BC^2 + AC \cdot BC$$

$$= AB^2 - (AC^2 + BC^2) + 2AC \cdot BC = 2CH \cdot AB = 2CH \cdot 2CO = 4CH \cdot CO \Rightarrow AK \cdot BK = CH \cdot CO$$

c) Kẻ $MN \perp AB$ tại N . Dễ dàng chứng minh được $BHCF$ là hình chữ nhật. Đặt $BH = x$

$$\text{Ta có } \frac{MN}{CH} = \frac{MN}{BF} = \frac{BN}{BH} = \frac{AN}{AB} = \frac{BN+AN}{BH+AB} = \frac{AB}{BH+AB} = \frac{2R}{x+2R} \Rightarrow MN = \frac{2R \cdot CH}{x+2R}$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cauchy ta có } CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{x(2R-x)} = \frac{2\sqrt{2x(2R-x)}}{2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x+2R)$$

$$\text{Suy ra } MN \leq \frac{R}{\sqrt{2}}. \text{ Diện tích } \triangle ABM \text{ lớn nhất khi } MN \text{ lớn nhất (vì } AB \text{ cố định), hay } MN = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

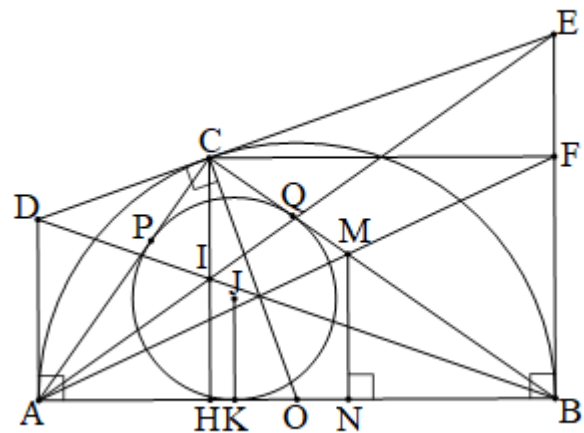
$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } 2x = 2R - x \Leftrightarrow x = \frac{2R}{3}. \text{ Điểm } C \text{ nằm trên nửa đường tròn } (O) \text{ sao cho}$$

$$CH = \sqrt{\frac{2R}{3} \left(2R - \frac{2R}{3} \right)} = \frac{2\sqrt{2}R}{3}. \text{ Khi đó } S_{ABM} = \frac{1}{2} MN \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot 2R = \frac{R^2}{\sqrt{2}}$$

Bài 5. Cho a, b là các số thực dương.

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{a+b}{1+ab} + \frac{ab}{1+a} + \frac{ab}{1+b} + \frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab} \geq 3$$

$$\text{Lời giải. Ta có } \frac{a+b}{1+ab} + \frac{ab}{1+a} + \frac{ab}{1+b} + \frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab} = \frac{a+b}{1+ab} + \frac{ab}{1+a} + \frac{ab}{1+b} + \frac{a+ab+b+ab}{(a+ab)(b+ab)}$$



$= \frac{a}{1+ab} + \frac{ab}{1+a} + \frac{1}{a+ab} + \frac{b}{1+ab} + \frac{ab}{1+b} + \frac{1}{b+ab}$. Áp dụng BĐT Svacxơ ta có

$$\frac{a}{1+ab} + \frac{ab}{1+a} + \frac{1}{a+ab} = \frac{a^2}{a+a^2b} + \frac{(ab)^2}{ab+a^2b} + \frac{1}{a+ab} \geq \frac{(a+ab+1)^2}{2(a^2b+ab+a)}$$

Áp dụng BĐT phụ $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ ta có $(a+ab+1)^2 \geq 3(a^2b+ab+a)$

Suy ra $\frac{a}{1+ab} + \frac{ab}{1+a} + \frac{1}{a+ab} \geq \frac{3}{2}$ (1). Tương tự ta cũng có

$$\frac{b}{1+ab} + \frac{ab}{1+b} + \frac{1}{b+ab} = \frac{b^2}{b+ab^2} + \frac{(ab)^2}{ab+ab^2} + \frac{1}{b+ab} \geq \frac{(b+ab+1)^2}{2(ab^2+ab+b)} \geq \frac{3}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a+b}{1+ab} + \frac{ab}{1+a} + \frac{ab}{1+b} + \frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab} \geq 3$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = 1$

_____ THCS.TOANMATH.com _____