

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} + \frac{a+1+2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \begin{pmatrix} a \geq 0 \\ a \neq 1 \end{pmatrix}$

b) Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x + m^2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của nó đi qua điểm $M(2;1)$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 4 = 0$ (với m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm giá trị của tham số m để $x_1^2 + x_2^2 = 3$

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$2x^2 - 8x + 62 = (x-1)y^2 + (x^2 - 6x + 5)y$$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình : $\sqrt{2x^2 + 5x + 12} + \sqrt{2x^2 + 3x + 2} = x + 5$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x+y)(16 - x^2y^2 - 4xy) = 2y^5 \end{cases}$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$, BC là một dây cung cố định của $(O; R)$ không qua O .

Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho $AB < AC$ và tam giác ABC nhọn. Các đường cao BD, CE cắt nhau tại H . Gọi T là giao điểm của DE với BC

a) Chứng minh tứ giác $BCDE$ nội tiếp đường tròn

b) Chứng minh $TB^2 = TD \cdot TE - TB \cdot BC$

c) Cho $BC = R\sqrt{3}$. Tính giá trị lớn nhất của chu vi ADH theo R

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq 2020$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức
$$P = \frac{\sqrt{y^2 + 2x^2}}{xy} + \frac{\sqrt{z^2 + 2y^2}}{yz} + \frac{\sqrt{x^2 + 2z^2}}{zx}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$a) A = \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-1} + \frac{(\sqrt{a}+1)^2}{\sqrt{a}+1} = \sqrt{a}+1 + \sqrt{a}+1 = 2(\sqrt{a}+1)$$

b) Hàm số $y = (m-1)x + m^2$ nghịch biến trên R và đồ thị của nó đi qua điểm $M(2;1)$

$$\text{nên } \begin{cases} m-1 < 0 \\ 1 = 2(m-1) + m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m^2 + 2m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$$

Vậy $m = -3$

Câu 2.

a) Ta có : $x_1 + x_2 = 2(m-1); x_1x_2 = 2m-4$

$$x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3$$

$$\Rightarrow 4(m-1)^2 - 2(2m-4) = 3 \Leftrightarrow (2m-3)^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Vậy $m = \frac{3}{2}$ thì $x_1^2 + x_2^2 = 3$

b) Với x, y nguyên dương, ta có:

$$2x^2 - 8x + 62 = (x-1)y^2 + (x^2 - 6x + 5)y$$

$$\Leftrightarrow (y-2)[x^2 + (y-4)x - (y-3)] = 56$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y-2)(x+y-3) = 56$$

Nhận thấy $(x-1) + (y-2) = x+y-3$ nên ta phải phân tích số 56 thành tích của 3 số nguyên mà tổng 2 số đầu bằng số còn lại $56 = 1.7.8 = 7.1.8$

Xét các trường hợp xảy ra ta được nghiệm nguyên dương của phương trình :

$(2;9); (8;3)$

Câu 3.

$$\text{a) ĐK: } x > -5. \text{ Đặt } u = \sqrt{2x^2 + 5x + 12}; v = \sqrt{2x^2 + 3x + 2} \begin{pmatrix} u > 0 \\ v > 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u^2 - v^2 = 2x + 10 = 2(x + 5) = 2(u + v)$$

$$\Leftrightarrow (u + v)(u - v - 2) = 0 \Leftrightarrow u - v - 2 = 0 \begin{pmatrix} u > 0 \\ v > 0 \end{pmatrix}$$

Do đó:

$$\sqrt{2x^2 + 5x + 12} = \sqrt{2x^2 + 3x + 2} + 2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 + 3x + 2} = x + 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 > 0 \\ \left(2\sqrt{2x^2 + 3x + 2}\right)^2 = (x + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ 7x^2 + 6x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ \begin{bmatrix} x = -1 \\ x = \frac{1}{7} \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \\ x = \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -1; x = \frac{1}{7}$

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 & (1) \\ (x + y)(16 - x^2y^2 - 4xy) = 2y^5 & (2) \end{cases}$$

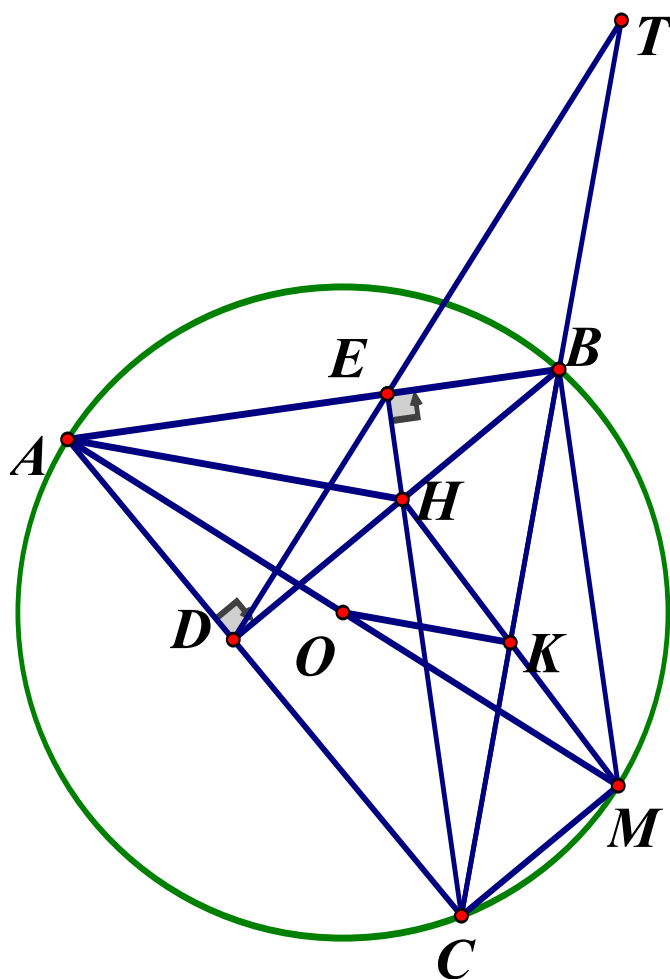
$$\text{Thay (1) vào (2) ta được: } (x + y) \left[(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 - (x^2 + y^2)xy \right] = 2y^5$$

$$\Leftrightarrow x^5 + y^5 = 2y^5 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{Thay } x = y \text{ vào (1) ta được: } \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm\sqrt{2}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) \in \{(\sqrt{2}; \sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})\}$

Câu 4.



a) Ta có: $BD \perp AC \Rightarrow \angle BDC = 90^\circ$; $CE \perp AB \Rightarrow \angle BEC = 90^\circ$
 $\Rightarrow D, E$ là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn BC (không đổi) dưới một góc 90° nên BCDE là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Vì BCDE là tứ giác nội tiếp nên $\angle BCE = \angle BDE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EB)

Xét tam giác TBD và tam giác TEC có: $\angle ETB$ chung; $\angle BCE = \angle BDE$

nên $\triangle TBD \sim \triangle TEC (g.g) \Rightarrow \frac{TB}{TD} = \frac{TE}{TC} \Rightarrow TB \cdot TC = TD \cdot TE$

mà $TC = TB + BC$ nên $TB \cdot (TB + BC) = TD \cdot TE \Leftrightarrow TB^2 = TD \cdot TE - TB \cdot BC$

c) Kẻ đường kính AM của (O) và gọi K là trung điểm của BC, ta có:

$$\begin{cases} BH \perp AC \\ MC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \parallel MC; \begin{cases} CH \perp AB \\ MB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CH \parallel MB$$

Suy ra tứ giác $BHCM$ là hình bình hành nên K là trung điểm của HM
 Tam giác AHM có OK là đường trung bình nên $AH = 2OK$ (1)

$$\text{Mà } BC = R\sqrt{3} \Rightarrow BK = \frac{R\sqrt{3}}{2}; OK = \sqrt{OB^2 - BK^2} = \frac{R}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH = R$ (không đổi)

Tam giác AHD vuông tại D nên $AD^2 + DH^2 = AH^2 = R^2$

Áp dụng BĐT $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \forall x, y$, đẳng thức xảy ra khi $x = y$

$$\Rightarrow (AD + DH)^2 \leq 2(AD^2 + DH^2) = 2R^2$$

$$\Rightarrow AD + DH \leq R\sqrt{2}$$

Chu vi của tam giác AHD là $AH + AD + HD \leq R + R\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})R$

Vậy chu vi của tam giác AHD lớn nhất bằng $(1 + \sqrt{2})R$ khi $HD = AD$

Câu 5.

Với hai số dương x, y ta có: $2(x - y)^2 \geq 0$, đẳng thức xảy ra khi $x = y$

$$\text{Ta có: } 2(y - x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3y^2 + 6x^2 \geq y^2 + 4xy + 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 3(y^2 + 2x^2) \geq (y + 2x)^2 \text{ và } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$$

$$\text{Do đó } \sqrt{y^2 + 2x^2} \geq \frac{y + 2x}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y^2 + 2x^2}}{xy} \geq \frac{y + 2x}{\sqrt{3}xy} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \right) \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{\sqrt{z^2 + 2y^2}}{yz} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right) \quad (2); \quad \frac{\sqrt{x^2 + 2z^2}}{zx} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{x} \right) \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) về theo về ta được:

$$\frac{\sqrt{y^2 + 2x^2}}{xy} + \frac{\sqrt{z^2 + 2y^2}}{yz} + \frac{\sqrt{x^2 + 2z^2}}{zx} \geq \sqrt{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Với $x, y, z > 0$ ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$; $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{y+z}$; $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \geq \frac{4}{z+x}$

Nên $2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 4 \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right) \geq 4.2020$ hay $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 4040$

Suy ra $P \geq 4040\sqrt{3}$, đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{3}{4040}$

Vậy $\text{Min}P = 4040\sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{3}{4040}$