

Câu 1. (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m+1)x + 3$ với m là tham số

- 1) Tìm tọa độ điểm A thuộc (P) sao cho độ dài đoạn thẳng $OA = 2\sqrt{5}$
- 2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$x_1^2 - 2mx_1 + 2x_2 - x_1x_2 = 2$$

Câu 2. (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình: $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + 4) + 23x^2 = 0$
- 2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+y} + 2\sqrt{x-y} = 4 + \sqrt{x^2 - y^2} \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 6 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

- 1) Chứng minh rằng khi lấy 1011 số bất kỳ từ 2020 số nguyên đầu tiên, ta luôn tìm được 2 số $x, y (x > y)$ từ 1011 số sao cho $x : y$
- 2) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình :

$$x^3 - x^2y - 4y^3 - y = 1$$

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{3(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(a + b + c)^3}{abc}$$

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$, đường cao AH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên AB, AC . Đường thẳng DE cắt tia CB tại M .

Đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính AH tại $I (I \neq A)$. Các đường thẳng BI và AC cắt nhau tại N . Chứng minh rằng:

- 1) Các tứ giác $ADHE$ và $BCED$ nội tiếp đường tròn
- 2) $\triangle MBI \sim \triangle MAC, \triangle NAI \sim \triangle NBC$
- 3) $MB \cdot MC + NA \cdot NC = MN^2$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1) Gọi $A(x_A; y_A)$, vì $A \in (P)$ nên ta có: $y_A = x_A^2$

$$\text{Khi đó } 2\sqrt{5} = OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{x_A^2 + x_A^4} \Leftrightarrow x_A^2 + x_A^4 - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A^2 = 4 \\ x_A^2 = -5(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Với } x_A^2 = 4 \Rightarrow x_A = \pm 2 \Rightarrow y_A = 4$$

Vậy $A(2; 4)$ hoặc $A(-2; 4)$

2) Phương trình hoành độ giao điểm (P) và (d) là :

$$x^2 = 2(m+1)x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x - 3 = 0(*)$$

Vì $ac < 0$ nên (*) có 2 nghiệm phân biệt với mọi m. Do đó (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m

$$\text{Khi đó, theo Vi - et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$$

Mặt khác ta có : $x_1^2 - 2(m+1)x_1 - 3 = 0$ (vì x_1 là nghiệm của (*)). Khi đó:

$$x_1^2 - 2mx_1 + 2x_2 - x_1 x_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 - 2x_1 + 2x_1 + 2x_2 - x_1 x_2 - 3 = -1$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2(m+1)x_1 + 2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 - 3 = -1$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + 2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 + x_1 x_2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 2.2(m+1) + 3 = -1 \Leftrightarrow 4m = -8 \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy $m = -2$

Câu 2.

1) Giải phương trình $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + 4) + 23x^2 = 0$

+) Với $x = 0 \Rightarrow VT \neq VP$ nên 0 không là nghiệm của phương trình

+) Với $x \neq 0$ ta có:

$$(x^2 + x + 4) + 8x(x^2 + 4) + 23x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{4}{x} + 1\right)^2 + 8\left(x + \frac{4}{x}\right) + 23 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)^2 + 8t + 23 = 0 \left(t = x + \frac{4}{x} \right)$$

$$\Leftrightarrow (t+4)(t+6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = -6 \end{cases}$$

$$*) t = -4 \Rightarrow x + \frac{4}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2(tm)$$

$$*) x = -6 \Rightarrow x + \frac{4}{x} = -6 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{5}(tm)$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $x = -2; x = -3 - \sqrt{5}; x = -3 + \sqrt{5}$

$$2) \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} 2\sqrt{x+y} + 2\sqrt{x-y} = 4 + \sqrt{x^2 - y^2} \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 6 \end{cases} \begin{pmatrix} x \geq 0; y \geq 0 \\ x \geq y \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$2\sqrt{x+y} + 2\sqrt{x-y} = 4 + \sqrt{x^2 - y^2} \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - y^2} - 2\sqrt{x-y}) - (2\sqrt{x+y} - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-y}(\sqrt{x+y} - 2) - 2(\sqrt{x+y} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+y} - 2)(\sqrt{x-y} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} - 2 = 0 \\ \sqrt{x-y} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ y=x-4 \end{cases}$$

$$*) y = 4 - x \Rightarrow 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 3\sqrt{4-x} = 6 (0 \leq x \leq 4)$$

$$\Leftrightarrow 4x + 9(4-x) + 12\sqrt{x(4-x)} = 36 \Leftrightarrow 12\sqrt{x(4-x)} = 5x$$

$$\Leftrightarrow 144x(4-x) = 25x^2 \Leftrightarrow x(169x - 576) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{576}{169} \end{cases}$$

$$*) y = x - 4 \Rightarrow 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x-4} = 6 (x \geq 4)$$

$$\Leftrightarrow 4x + 9(x-4) + 12\sqrt{x(x-4)} = 36 \Leftrightarrow 12\sqrt{x(x-4)} = 72 - 13x \left(4 \leq x \leq \frac{72}{13} \right)$$

$$\Leftrightarrow 144x(x-4) = (72-13x)^2 \Leftrightarrow 25x^2 - 1296x + 5184 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{648 - 144\sqrt{14}}{25} (tm) \Rightarrow y = \frac{548 - 144\sqrt{14}}{25} (tm) \\ x = \frac{644 + 144\sqrt{14}}{25} (ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm } \begin{cases} x = \frac{576}{169} \\ y = \frac{100}{169} \end{cases} \text{ vs } \begin{cases} x = \frac{648 - 144\sqrt{14}}{25} \\ y = \frac{548 - 144\sqrt{14}}{25} \end{cases}$$

Câu 3.

1) Xét 1011 số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{1011}$ bất kỳ từ 2020 số nguyên dương đầu tiên

Đặt $a_i = 2^{k_i} b_i$, khi đó ta có 1011 số lẻ $b_1; b_2; b_3; \dots; b_{1011}$

Mà trong 2020 số nguyên dương đầu tiên chỉ có 1010 số lẻ nên tồn tại $b_i = b_j$

Khi đó $x = a_i = 2^{k_i} b_i; y = a_j = 2^{k_j} b_j (x > y)$. Suy ra x chia hết cho y

2) Ta có:

$$x^3 - x^2y - 4y^3 - y = 1 \Leftrightarrow 1 + y = (x^3 - 8y^3) - (x^2y - 4y^3)$$

$$\Leftrightarrow 1 + y = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) - y(x - 2y)(x + 2y) = (x - 2y)(x^2 + xy + 2y^2) (*)$$

$$+) y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x^2 - x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

$$+) y + 1 \neq 0 \Rightarrow y \neq -1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x^2 + xy + 2y^2 \in U(y + 1)$$

$$|y + 1| \geq x^2 + xy + 2y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 > y^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y - 1 < 0 \\ y^2 + y + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ (do } y \in \mathbb{Q}, y^2 + y + 1 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0)$$

$$+) y = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$+) y = 1 \Rightarrow (x - 2)(x^2 + x + 2) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ x^2 + x + 2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \left(\text{do } x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \right)$$

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $(x; y) = (-2; -1), (1; 0)$

Câu 4.

$$\text{Với } a, b, c > 0 \text{ ta chứng minh được } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{abc} \geq \frac{9}{(a + b + c)(ab + bc + ca)} \Rightarrow \frac{(a + b + c)^3}{abc} \geq \frac{9(a + b + c)^2}{ab + bc + ca}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9(a + b + c)^2}{ab + bc + ca} = \frac{3(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9[(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)]}{ab + bc + ca}$$

$$= \frac{3(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} + 18$$

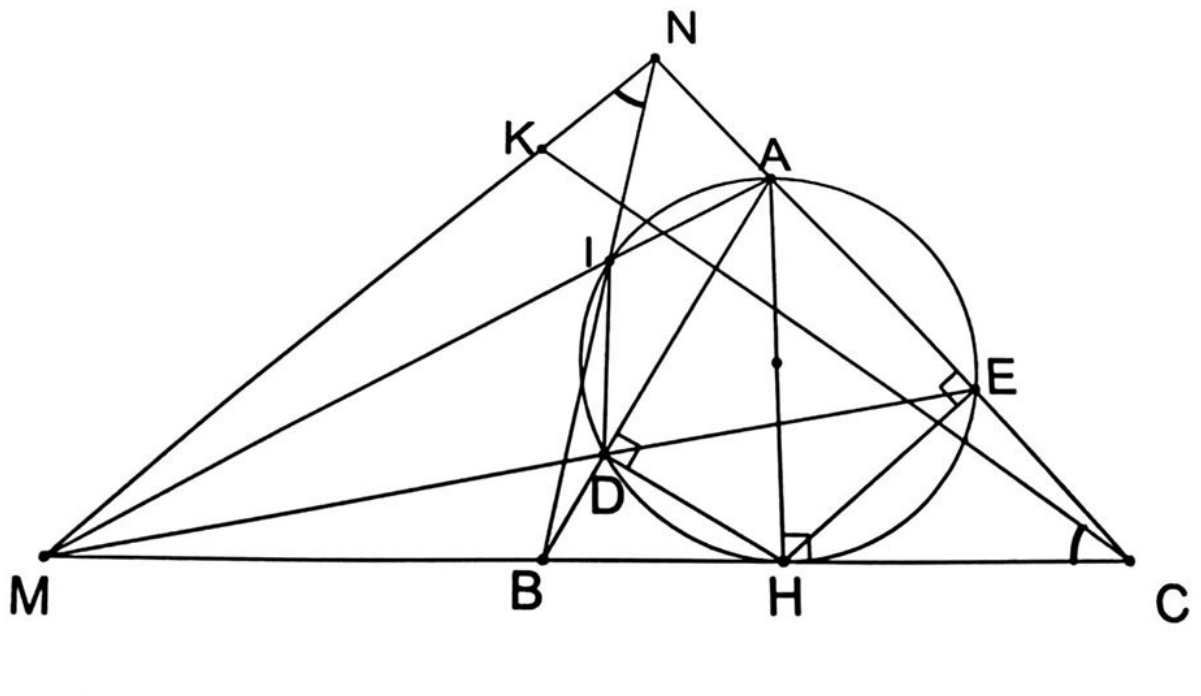
$$= 3 \left(\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \right) + \frac{6(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} + 18$$

Lại có $a, b, c > 0$ ta chứng minh được

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq 1$$

$$\text{Và } \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq 2$$

Câu 5.



Vậy tứ giác $BCED$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \angle MBI = \angle MAC$$

Hay $\angle NIA = \angle NCB$

$$\text{Vậy } \Delta NAI \neq \Delta NBC(g - g)$$

3) Ta có: $MCA = MIB(\Delta MBI \square \Delta MAC)$

$$\angle MIB > \angle MNB \text{ (góc ngoài tam giác } MIB) \Rightarrow \widehat{MCA} > \widehat{MNB}$$

Kẻ tia CK ($K \in MN$) sao cho $\widehat{MCK} = \angle MNB$ vì $\angle MCA > \angle MNB$ (cmt)

$$\Rightarrow \angle MCK < \angle MCA = \angle MCN \Rightarrow K \text{ nằm giữa } M \text{ và } N. \text{ Do đó } MN = MK + NK \text{ (1)}$$

Xét $\triangle MBN$ và $\triangle MKC$ có: $\angle M$ chung; $\angle MCA = \angle MNB$ (cách vẽ)

$$\text{Nên } \triangle MBN \sim \triangle MKC (g.g) \Rightarrow \frac{MB}{MN} = \frac{MK}{MC} \Rightarrow MB \cdot MC = MK \cdot MN \text{ (2)}$$

Lại có: $\angle MKC = \angle MAC \Rightarrow ACMK$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \angle AMK = \angle ACK \text{ hay } \angle NMA = \angle KCN$$

Xét $\triangle MAN$ và $\triangle NKC$ có: $\angle N$ chung; $\angle NMA = \angle KCN$ (cmt)

$$\text{Vậy } \triangle MAN \sim \triangle NKC (g.g) \Rightarrow \frac{NA}{MN} = \frac{NK}{NC} \Rightarrow NA \cdot NC = NK \cdot MN \text{ (3)}$$

Từ (1), (2), (3) ta có:

$$MB \cdot MC = MK \cdot KN + NK \cdot MN = (MK + NK) \cdot MN = MN^2$$