

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Cho các số thực a, b không âm thỏa mãn điều kiện $(a+2)(b+2)=8$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = ab + 2\sqrt{a^2 + b^2 + 8} - \sqrt{2(a^2 + 4)(b^2 + 4)}$$

b) Cho các số hữu tỉ a, b, c đôi một phân biệt. Đặt $B = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}}$. Chứng minh rằng B là số hữu tỉ.

Bài 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 9x + 18) = 168x^2$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x^2 + 1} = y + \frac{1}{y^2 + 1} \\ x^2 + 2x\sqrt{y + \frac{1}{y}} = 8x - 1 \end{cases}$$

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 4y + 6 = 0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{p^2 - p}{2} - 1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Tiếp tuyến tại A của đường tròn tâm O cắt đường tròn tâm O' tại $P (P \neq A)$. Tiếp tuyến tại A của đường tròn tâm O' cắt đường tròn tâm O tại $Q (Q \neq A)$. Gọi I là điểm sao cho tứ giác $AOIO'$ là hình bình hành và D đối xứng với A qua B .

a) Chứng minh rằng I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ . Từ đó suy ra tứ giác $ADPQ$ nội tiếp?

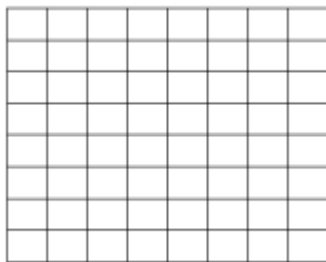
b) Gọi M là trung điểm của đoạn PQ . Chứng minh $\widehat{ADP} = \widehat{QDM}$.

c) Giả sử hai đường thẳng IB và PQ cắt nhau tại S . Gọi K là giao điểm của AD và PQ . Chứng minh:

$$\frac{2}{SK} = \frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ}$$

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho bảng kê ô vuông kích thước 8×8 gồm có 64 ô vuông con (như hình vẽ bên). Người ta đặt 33 quân cờ vào các ô vuông con của bảng sao cho mỗi ô vuông con có không quá một quân cờ. Hai quân cờ được gọi là "chiếu nhau" nếu chúng nằm cùng một hàng hoặc nằm cùng một cột. Chứng minh rằng với mỗi cách đặt luôn tồn tại ít nhất 5 quân cờ đôi một không chiếu nhau.



LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Cho các số thực a, b không âm thỏa mãn điều kiện $(a+2)(b+2)=8$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = ab + 2\sqrt{a^2 + b^2 + 8} - \sqrt{2(a^2 + 4)(b^2 + 4)}$$

b) Cho các số hữu tỉ a, b, c đôi một phân biệt. Đặt $B = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}}$. Chứng minh rằng B là số hữu tỉ.

Bài giải

a) Ta có: $(a+2)(b+2)=8 \Leftrightarrow 2a+2b+ab=4$.

Do đó:

$$\begin{aligned}\sqrt{2(a^2+4)(b^2+4)} &= \sqrt{2(a^2+ab+2a+2b)(b^2+ab+2a+2b)} \\ &= \sqrt{2(a+b)^2(a+2)(b+2)} = \sqrt{2(a+b)^2 \cdot 8} = 4(a+b).\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}2\sqrt{a^2+b^2+8} - \sqrt{2(a^2+4)(b^2+4)} &= 2\sqrt{a^2+b^2+8} - 4(a+b) \\ &= 2\sqrt{(a+b)^2+8-4(a+b)-2ab} = 2\sqrt{(a+b)^2} = 2(a+b).\end{aligned}$$

Khi đó: $P = ab + 2(a+b) = 4$.

Vậy $P = 4$.

b) Đặt $x = a-b, y = b-c, z = c-a \Rightarrow x, y, z \neq 0$ và $x+y+z=0$.

Ta có:

$$\begin{aligned}B &= \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - \frac{2(x+y+z)}{xyz}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} = \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right|\end{aligned}$$

Vì a, b, c là các số hữu tỷ nên x, y, z là các số hữu tỷ, do đó B là số hữu tỷ.

Bài 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 9x + 18) = 168x^2$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x^2 + 1} = y + \frac{1}{y^2 + 1} \\ x^2 + 2x\sqrt{y + \frac{1}{y}} = 8x - 1 \end{cases}$$

Bài giải

a) Do $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned} (x+1)(x+2)(x+3)(x+6) &= 168x^2 \Leftrightarrow (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 5x + 6) = 168x^2 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{x} + 7\right)\left(x + \frac{6}{x} + 5\right) &= 168 \Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{x}\right)^2 + 12\left(x + \frac{6}{x}\right) + 35 = 168 \Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{x}\right)^2 + 12\left(x + \frac{6}{x}\right) - 133 = 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{x} - 7\right)\left(x + \frac{6}{x} + 19\right) &= 0 \Leftrightarrow (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 19x + 6) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0 \\ x^2 + 19x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases} \text{ hoặc } x = -\frac{\sqrt{337} - 19}{2}, x = \frac{\sqrt{337} + 19}{2} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{1; 6; \frac{\sqrt{337} - 19}{2}; -\frac{\sqrt{337} + 19}{2}\right\}$.

b) Điều kiện $y > 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương:

$$\begin{aligned} x - y + \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{y^2 + 1} &= 0 \Leftrightarrow x - y - \frac{(x - y)(x + y)}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} = 0 \\ \Leftrightarrow (x - y) \left[1 - \frac{x + y}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \right] &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ (x^2 + 1)(y^2 + 1) = x + y \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có:

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = x + y \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - y + x^2y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2y^2 + \frac{1}{2} = 0, \text{ vô lí.}$$

Do đó trong trường hợp này hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $(x; y) = (2 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}), (2 - \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$.

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 4y + 6 = 0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{p^2 - p}{2} - 1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài giải

a) Ta có:

$$x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 4y + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y) + (y^2 - 6y + 9) = 4$$

$$\Leftrightarrow (x - y - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} (x - y - 1)^2 = 4 \\ (y - 3)^2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} (x - y - 1)^2 = 0 \\ (y - 3)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp: } \begin{cases} (x - y - 1)^2 = 4 \\ (y - 3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 4)^2 = 4 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Trường hợp: } \begin{cases} (x - y - 1)^2 = 0 \\ (y - 3)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y = 5 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm $(x; y) = (6; 3), (2; 3), (6; 5), (2; 1)$.

b) Ta có: $\frac{p^2 - p}{2} - 1 = a^3$ với $a \geq 0$. Khi đó:

$$\frac{p^2 - p}{2} - 1 = a^3 \Leftrightarrow p(p - 1) = 2(a + 1)(a^2 - a + 1). \text{ Vì } \text{ucln}(p; p - 1) = 1 \text{ nên } p(p - 1) \text{ chia hết cho } (a + 1) \Leftrightarrow p \text{ chia hết cho } (a + 1) \text{ hoặc } p - 1 \text{ chia hết cho } (a + 1).$$

$$\text{- Xét } p : (a + 1) \Rightarrow p = k(a + 1). \text{ Mà } p \text{ là số nguyên tố suy ra: } \begin{cases} k = 1 \\ a + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ a = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Với } a = 0 \Rightarrow p = 2.$$

$$\text{Nếu } k = 1 \Rightarrow p = a + 1 \Rightarrow a(a + 1) = 2(a + 1)(a^2 - a + 1), \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{Xét } p - 1 : (a + 1) \Rightarrow p = m(a + 1) + 1. \text{ Khi đó ta có:}$$

$$m(a + 1)p = 2(a + 1)(a^2 - a + 1) \Leftrightarrow mp = 2(a^2 - a + 1). \text{ Ta có: } a^2 - a + 1 = a(a - 1) + 1 \text{ là một số lẻ.}$$

$$\text{Suy ra: } \text{ucln}(2; a^2 - a + 1) = 1.$$

$$\text{Nên } 2(a^2 - a + 1) : m \Leftrightarrow 2 : m \text{ hoặc } (a^2 - a + 1) : m.$$

$$\text{Nếu } 2 : m \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Với } k = 1 \Rightarrow 2(a^2 - a + 1) = a + 2 \Leftrightarrow 2a^2 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$\text{Với } k = 2 \Rightarrow a^2 - a + 1 = 2(a + 1) + 1 \Leftrightarrow a^2 - 3a - 1 = 0, \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{Nếu } a^2 - a + 1 : m \Rightarrow a^2 - a + 1 = mn. \text{ Khi đó ta có: } m(a + 1) + 1 = 2n.$$

Mặt khác $p = m(a + 1) + 1 = 2n$ là số nguyên tố suy ra $p = 2, n = 1 \Rightarrow a = 0$.

Tóm lại $p = 2$ là số nguyên tố cần tìm.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Tiếp tuyến tại A của đường tròn tâm O cắt đường tròn tâm O' tại $P (P \neq A)$. Tiếp tuyến tại A của đường tròn tâm O' cắt đường tròn tâm O tại $Q (Q \neq A)$. Gọi I là điểm sao cho tứ giác $AOIO'$ là hình bình hành và D đối xứng với A qua B .

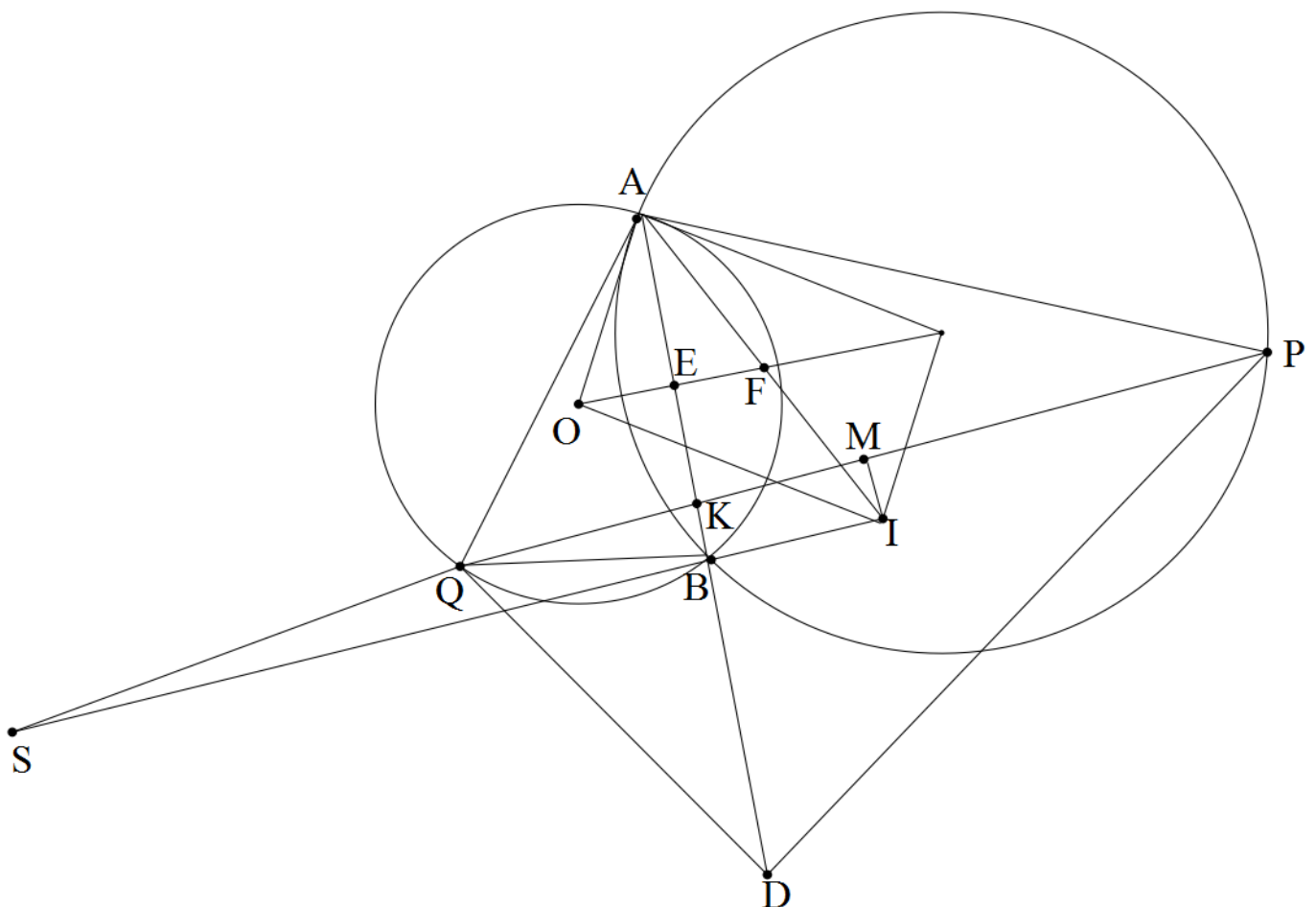
a) Chứng minh rằng I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ . Từ đó suy ra tứ giác $ADPQ$ nội tiếp?

b) Gọi M là trung điểm của đoạn PQ . Chứng minh $\widehat{ADP} = \widehat{QDM}$.

c) Giả sử hai đường thẳng IB và PQ cắt nhau tại S . Gọi K là giao điểm của AD và PQ . Chứng minh:

$$\frac{2}{SK} = \frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ}$$

Bài giải



a) Ta có: $OA \perp AP$ mà $IO' // OA \Rightarrow IO' \perp AP \Rightarrow I'$ nằm trên đường trung trực của $AP \Rightarrow IA = IP$. Chứng minh tương tự ta cũng có: $IA = IQ$.

Từ đó suy ra: $IA = IP = IQ \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ .

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của OO' với AB và AI . Ta có:

Dễ thấy E, F lần lượt là trung điểm của AB và $AI \Rightarrow EF$ là đường trung bình của tam giác ABI .

Suy ra $EF // BI$ hay $OO' // BI$. Do đó $BI \perp AB$ tại B .

Từ đó IB là đường trung trực của $AD \Rightarrow IA = ID$.

Do đó tứ giác $ADPQ$ nội tiếp.

b) Ta có: $\widehat{QPD} = \widehat{QAD} = \widehat{QAB} = \widehat{APB} = \frac{1}{2} \widehat{AO'B} = \widehat{AO'O}$, hay $\widehat{QPD} = \widehat{AO'O}$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\widehat{PQD} = \widehat{AOO'}$.

Từ đó suy ra $\triangle AOO' \sim \triangle DQP$

Mà M là trung điểm của PQ và F là trung điểm của $OO' \Rightarrow \widehat{QDM} = \widehat{OAF}$.

Mặt khác $\widehat{ADP} = \frac{1}{2} \widehat{AIP} = \widehat{AIO'} = \widehat{OAF}$.

Từ đây suy ra: $\widehat{APD} = \widehat{QDM}$.

c) Theo chứng minh trên ta có: $\widehat{QPD} = \widehat{QAB}$.

Mặt khác $\widehat{DQP} = \widehat{DAP} = \widehat{AQB}$, hay $\widehat{DQP} = \widehat{AQB}$

Từ đó suy ra $\triangle AQB \sim \triangle PQD$.

Suy ra:

$$\begin{aligned} \widehat{QBI} + \widehat{IPQ} &= \widehat{QBA} + \widehat{ABI} + \widehat{IPQ} = \widehat{QDP} + 90^\circ + \widehat{IPQ} \\ &= \widehat{QPD} + 90^\circ + \frac{180^\circ - \widehat{QIP}}{2} = 180^\circ + \widehat{QPD} - \widehat{QDP} = 180^\circ \end{aligned}$$

Do đó tứ giác $QBIP$ nội tiếp. Suy ra: $SQ \cdot SP = SB \cdot SI$

Vì M là trung điểm của đoạn $PQ \Rightarrow IM \perp PQ \Rightarrow$ tứ giác $BKMI$ nội tiếp. Suy ra: $SK \cdot SM = SB \cdot SI$

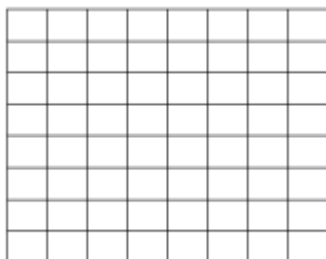
$$\text{Từ đó ta suy: } SQ \cdot SP = SK \cdot SM \Leftrightarrow \frac{1}{SK} = \frac{SM}{SQ \cdot SP}$$

$$\text{Mà } SM = SP - MP = SP - MQ = SP - (SM - SQ) = SP + SQ - SM \Rightarrow SP + SQ = 2SM$$

$$\text{Nên ta có: } \frac{1}{SK} = \frac{SM}{SQ \cdot SP} \Leftrightarrow \frac{2}{SK} = \frac{2SM}{SQ \cdot SP} \Leftrightarrow \frac{2}{SK} = \frac{SQ + SP}{SQ \cdot SP} \Leftrightarrow \frac{2}{SK} = \frac{1}{SQ} + \frac{1}{SP}$$

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho bảng kẻ ô vuông kích thước 8×8 gồm có 64 ô vuông con (như hình vẽ bên). Người ta đặt 33 quân cờ vào các ô vuông con của bảng sao cho mỗi ô vuông con có không quá một quân cờ. Hai quân cờ được gọi là "chiếu nhau" nếu chúng nằm cùng một hàng hoặc nằm cùng một cột. Chứng minh rằng với mỗi cách đặt luôn tồn tại ít nhất 5 quân cờ đôi một không chiếu nhau.



Lời giải

Đánh số các ô của bảng như hình vẽ.

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
6	7	8	1	2	3	4	5
5	6	7	8	1	2	5	4
4	5	6	7	8	1	2	3
3	4	5	6	7	8	1	2
2	3	4	5	6	7	8	1

Theo nguyên lí Dirichle đặt 33 quân cờ vào mỗi ô mà có 8 loại ô là các số được đánh từ 1 đến 8 nên có ít nhất 5 quân cờ cùng một số. Theo bảng này các quân cờ được đặt trong các ô có cùng số thì không chiếu nhau.

Suy ra điều phải chứng minh.