

Bài 1. (5,0 điểm):

1/ Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$.

2/ Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 1 = 0$ (1) (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 = 57$.

Bài 2. (5,0 điểm):

1/ Tìm tất cả các cặp số nguyên không dương (x, y) thỏa mãn $x^3 + y^2 = xy^2 + 1$.

2/ Cho tam giác ABC vuông tại A , đường phân giác trong AD vuông góc với đường trung tuyến BE tại F . Tính diện tích tam giác FED biết $AD = a\sqrt{2}$.

Bài 3. (4,0 điểm):

Cho đường thẳng d và điểm A cố định không thuộc d , H là hình chiếu của A trên d . Đường tròn (C) thay đổi qua A cắt đường thẳng d tại B, C sao cho $HB \cdot HC = k$, (k là hằng số dương).

Gọi M, N tương ứng là hình chiếu của H lên AB, AC .

1/ Chứng minh tứ giác $MNCB$ nội tiếp.

2/ Chứng minh đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.

Bài 4. (4,0 điểm):

1/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 1 + 2x \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

2/ Cho biểu thức $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, biết $f(1) = 10$; $f(2) = 20$, Tính giá trị biểu thức

$$S = \frac{f(11) - f(-8) - 100}{100}.$$

Bài 5 (2,0 điểm):

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq \frac{1}{4}$; $b \geq \frac{1}{4}$; $c \geq \frac{1}{4}$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

$$\text{thức } P = \sqrt{4a-1} + \sqrt{4b-1} + \sqrt{4c-1}.$$

--- Hết ---

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

LỜI GIẢI**Bài 1.** (5,0 điểm):

1/ Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{29-12\sqrt{5}}$.

2/ Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m+1 = 0$ (1) (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 = 57$.

Lời giải

$$1/ P = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{29-12\sqrt{5}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - (2\sqrt{5}-3) = \sqrt{9} = 3.$$

2/ Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - (2m+1) = m^2 \geq 0$ với mọi m . Phương trình luôn có hai nghiệm.

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2m+2$ và $x_1x_2 = 2m+1$.

Ta có $x_1^2 = 2(m+1)x_1 - 2m - 1$. Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2(m+1)x_2 &= 57 \Leftrightarrow 2(m+1)x_1 + 2(m+1)x_2 - 2m - 1 = 57 \\ &\Leftrightarrow 2(m+1)(x_1 + x_2) - 2m - 1 = 57 \Leftrightarrow (2m+2)(2m+2) - 2m - 1 = 57 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 + 6m - 54 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 3m - 27 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = -\frac{9}{2} \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Vậy, $m \in \left\{3; -\frac{9}{2}\right\}$.

Bài 2. (5,0 điểm):

1/ Tìm tất cả các cặp số nguyên không dương (x, y) thỏa mãn $x^3 + y^2 = xy^2 + 1$.

2/ Cho tam giác ABC vuông tại A , đường phân giác trong AD vuông góc với đường trung tuyến BE tại F . Tính diện tích tam giác FED biết $AD = a\sqrt{2}$.

Lời giải

$$1/ x^3 + y^2 = xy^2 + 1 \Leftrightarrow y^2(1-x) = 1-x^3$$

Nếu $1-x = 0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow 1=0$ (vô nghiệm).

$$\begin{aligned} \text{Nếu } 1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1, (1) &\Leftrightarrow y^2 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow (2y)^2 - (2x+1)^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow (2y+2x+1)(2y-2x-1) = 3. (2) \end{aligned}$$

Nên ta có các trường hợp sau

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2y+2x+1=3 \\ 2y-2x-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases} \text{ (loại).}$$

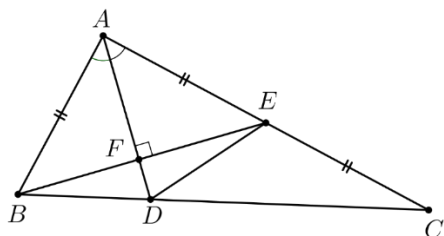
$$\text{TH2: } \begin{cases} 2y+2x+1=-3 \\ 2y-2x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 2y+2x+1=-1 \\ 2y-2x-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 2y+2x+1=1 \\ 2y-2x-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ (loại).}$$

Vậy, cặp số nguyên không dương thỏa mãn bài toán là $(-1; -1)$.

2/



Từ giả thiết, ta suy ra $FA = FB = FE$, tam giác ABE vuông cân tại A nên $AB = AE = EC = \frac{1}{2}AC$.

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABF} = S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABE} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}. \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADE} = S_{\triangle DEC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}. \quad (2)$$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle DEF} = S_{\triangle ADE} - S_{\triangle AEF} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} - \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12}S_{\triangle ABC}. \quad (3)$$

$$\text{Từ đó suy ra } S_{\triangle DEF} = \frac{1}{3}S_{\triangle AEF} \Rightarrow AF = 3FD \Rightarrow AF = \frac{3}{4}AD = \frac{3\sqrt{2}a}{4}. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}AF^2 = \frac{9}{16}a^2. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } S_{\triangle DEF} = \frac{1}{3}S_{\triangle AEF} = \frac{3}{16}a^2.$$

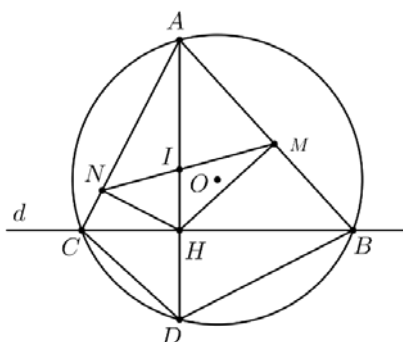
Bài 3. (4,0 điểm):

Cho đường thẳng d và điểm A cố định không thuộc d , H là hình chiếu của A trên d . Đường tròn (C) thay đổi qua A cắt đường thẳng d tại B, C sao cho $HB \cdot HC = k$, (k là hằng số dương).

Gọi M, N tương ứng là hình chiếu của H lên AB, AC .

1/ Chứng minh tứ giác $MNCB$ nội tiếp.

2/ Chứng minh đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.



Lời giải

a/ Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , có HN là đường cao ta có $AH^2 = AN \cdot AC$. (1)

$\triangle AHB$ vuông tại H , có HM là đường cao ta có $AH^2 = AM \cdot AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AN \cdot AC = AM \cdot AB \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC}$, ta lại có $\widehat{MAN} = \widehat{CAB}$ nên suy ra

$\triangle ANM \sim \triangle ABC$ (c.g.c), suy ra $\widehat{ANM} = \widehat{ABC} \Rightarrow$ Tứ giác $MNCB$ nội tiếp một đường tròn.

b/ Gọi $AH \cap (O) = \{D\}$, $MN \cap \{AH\} = \{I\}$.

Ta chứng minh được $\Delta AHC \sim \Delta BHD$ (g.g) suy ra $\frac{AH}{BH} = \frac{HC}{HD} \Rightarrow HB.HC = HA.HD = k$ nên

$HD = \frac{k}{AH}$ không đổi, suy ra D cố định.

Ta lại có $\widehat{ANM} = \widehat{ADC} (= \widehat{ABC})$. Xét ΔANI và ΔADC có $\widehat{NAI}$ chung và $\widehat{ANM} = \widehat{ADC}$ (cmt)

Do đó $\Delta ANI \sim \Delta ADC$ (g.g) suy ra $\frac{AN}{AD} = \frac{AI}{AC} \Rightarrow AI = \frac{AN.AC}{AD} = \frac{AH^2}{AD}$ không đổi, mà A cố định nên I cố định.

Vậy MN đi qua điểm I cố định.

Bài 4. (4,0 điểm):

1/ Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - x^2 = 1 + 2x \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$.

2/ Cho biểu thức $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, biết $f(1) = 10$; $f(2) = 20$, Tính giá trị biểu thức

$$S = \frac{f(11) - f(-8) - 100}{100}.$$

Lời giải

1/ $\begin{cases} y^2 - x^2 = 1 + 2x & (1) \\ x^2 + xy + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$. Từ PT (1) ta có $y^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow y = x+1 \vee y = -x-1$, xét các trường hợp

ta có

TH1: $y = x+1$, thay vào PT (2) ta có $x^2 + x(x+1) + (x+1)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow 3x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}.$$

TH2: $y = -x-1$, thay vào PT (2) ta có $x^2 - x(x+1) + (x+1)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}.$$

Vậy, tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \{(0;1); (-1;0); (0;-1); (-1;0)\}$.

2/ Xét đa thức $P(x) = f(x) - 10x$, ta có $P(1) = 0$ và $P(2) = 0$, mà đa thức $P(x)$ bậc 3 nên $P(x)$ có dạng

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x+m) \Rightarrow f(x) = (x-1)(x-2)(x+m) + 10x. \quad (1)$$

Thay $x = 11$ và $x = -8$ vào đa thức $f(x)$ ta có $S = 19$.

Bài 5 (2,0 điểm)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq \frac{1}{4}; b \geq \frac{1}{4}; c \geq \frac{1}{4}$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{4a-1} + \sqrt{4b-1} + \sqrt{4c-1}$.

Lời giải

Áp dụng BĐT AM – GM ta có

$$\sqrt{(4a-1) \cdot \frac{1}{3}} \leq \frac{4a-1+\frac{1}{3}}{2} = \frac{6a-1}{3} \Rightarrow \sqrt{4a-1} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (6a-1). \quad (1)$$

$$\sqrt{(4b-1) \cdot \frac{1}{3}} \leq \frac{4b-1+\frac{1}{3}}{2} = \frac{6b-1}{3} \Rightarrow \sqrt{4b-1} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (6b-1). \quad (2)$$

$$\sqrt{(4c-1) \cdot \frac{1}{3}} \leq \frac{4c-1+\frac{1}{3}}{2} = \frac{6c-1}{3} \Rightarrow \sqrt{4c-1} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (6c-1). \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có $P \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (6(a+b+c)-3) = \sqrt{3}$.

Vậy, P có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{3}$ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.