

Câu I. (3,5 điểm)

1. Xét biểu thức $Q = \frac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}} \cdot \left[\sqrt{(2+x)^3} - \sqrt{(2-x)^3} \right]}{4+\sqrt{4-x^2}}$.

Tìm điều kiện của x để Q xác định và rút gọn Q .

2. Xét đa thức bậc bốn $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $P(-1) = 3$, $P(3) = 19$ và $P(5) = 51$. Tính giá trị của $T = 3P(-2) + 5P(6)$.

Câu II. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{10x-5} + \sqrt{5x^2+5} = \sqrt{9x(x+2)}$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 + y - x + xy \\ 7xy + y - x = 7 \end{cases}$$

Câu III. (2,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m-1)x - m^2$, với m là tham số. Tìm các giá trị nguyên của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m-1)x_2 \leq 3m^2 + 20$.

Câu IV. (1,5 điểm) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2^x + 33 = y^2$.

Câu V. (7,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . Đường thẳng AI cắt (O) tại điểm thứ hai là M . Đường tròn (I) tiếp xúc với hai cạnh BC, CA lần lượt tại hai điểm D và E . Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng BI và DE .

1. Chứng minh $MB = MC = MI$.
2. Chứng minh tứ giác $AITE$ nội tiếp đường tròn.
3. Kẻ đường kính AP của (O) và đường cao AH của tam giác ABC . Đường thẳng MP lần lượt cắt hai đường thẳng AH, BC tại hai điểm N, K . Chứng minh $MI^2 = MN.MK$.
4. Đường thẳng PI cắt (O) tại điểm thứ hai là Q , hai đường thẳng AQ và BC cắt nhau tại điểm S . Chứng minh rằng nếu chu vi của tam giác ABC bằng $3BC$ thì I là trọng tâm của tam giác AKS .

Câu VI. (2,0 điểm) Xét a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.

Chứng minh rằng:
$$\frac{b^2}{(ab+2)(2ab+1)} + \frac{c^2}{(bc+2)(2bc+1)} + \frac{a^2}{(ca+2)(2ca+1)} \geq \frac{1}{3}.$$

--- HẾT ---

UBND TỈNH HÀ NAM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS
NĂM HỌC 2021 – 2022
Môn: TOÁN

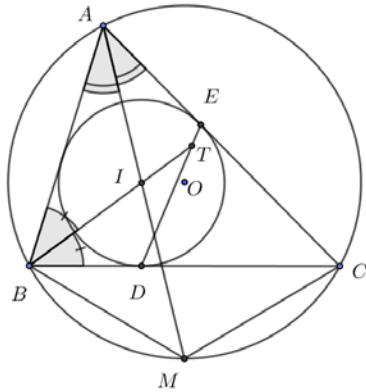
ĐỀ CHÍNH THỨC

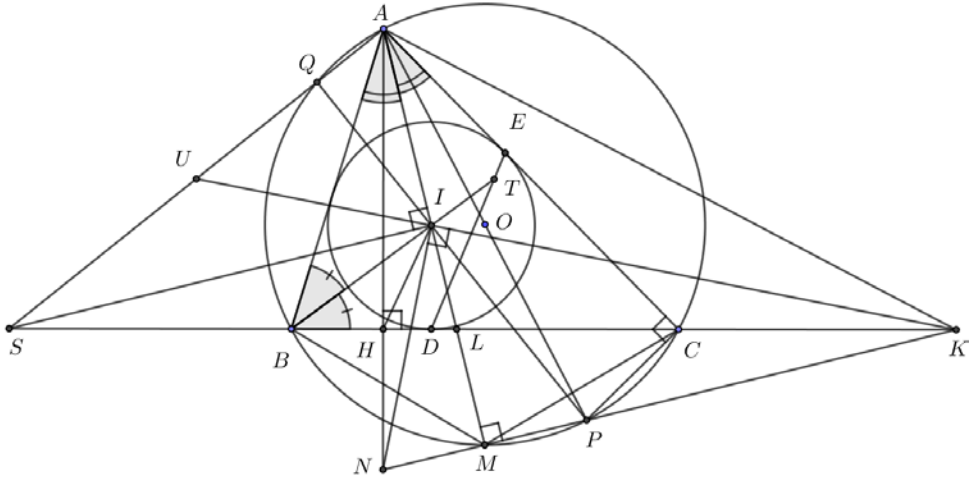
HƯỚNG DẪN CHẤM
(Hướng dẫn chấm gồm 06 trang)

0 .

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
I. (3,5 điểm)	1. Xét biểu thức $Q = \frac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}} \cdot \left[\sqrt{(2+x)^3} - \sqrt{(2-x)^3} \right]}{4+\sqrt{4-x^2}}$. Tìm điều kiện của x để Q xác định và rút gọn Q .	2,0
	Điều kiện xác định: $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 2+x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x \geq -2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x \leq 2.$	0,5
	$P = \frac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}} \cdot (\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}) (4+\sqrt{4-x^2})}{4+\sqrt{4-x^2}}$	0,5
	$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4+2\sqrt{4-x^2}} \cdot (\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x})$	0,5
	$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})^2} \cdot (\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x})$	
	$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) (\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x})$	0,5
	$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2x = \sqrt{2}x.$	
	2. Xét đa thức bậc bốn $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $P(-1) = 3$, $P(3) = 19$ và $P(5) = 51$. Tính giá trị của $T = 3P(-2) + 5P(6)$.	1,5
	Đa thức $f(x) = 2x^2 + 1$ thỏa mãn $f(-1) = 3$, $f(3) = 19$ và $f(5) = 51$. Xét đa thức $Q(x) = P(x) - f(x)$ là đa thức bậc bốn có các nghiệm $x = -1, x = 3$ và $x = 5$	0,5
	Nên $Q(x) = (x+1)(x-3)(x-5)(x-m)$ $\Rightarrow P(x) = Q(x) + f(x) = (x+1)(x-3)(x-5)(x-m) + 2x^2 + 1$	0,5
	$P(-2) = 35(m+2) + 9 = 79 + 35m$ $P(6) = 21(6-m) + 73 = 199 - 21m$ Vậy $3P(-2) + 5P(6) = 3(79 + 35m) + 5(199 - 21m) = 1232.$	0,5
II. (4,0 điểm)	1. Giải phương trình: $\sqrt{10x-5} + \sqrt{5x^2+5} = \sqrt{9x(x+2)} (*)$.	2,0
	Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$	0,5
	$(*) \Leftrightarrow \sqrt{5}(\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^2+1}) = 3\sqrt{x^2+2x}$	
	Đặt $a = \sqrt{2x-1}, b = \sqrt{x^2+1}$ ($a \geq 0, b > 0$) $\Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 + 2x$	

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{5}(a+b) = 3\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow 5(a+b)^2 = 9(a^2+b^2)$ $\Leftrightarrow 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-b)(a-2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=b \\ a=2b \end{cases}$ +) $2a=b \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 4(2x-1) = x^2+1$ $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{11}$ (thỏa mãn). +) $a=2b \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 2\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 2x-1 = 4(x^2+1)$ $\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 5 = 0$ (vô nghiệm). Vậy $S = \{4 \pm \sqrt{11}\}$.	0,5
	+) $2a=b \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 4(2x-1) = x^2+1$ $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{11}$ (thỏa mãn).	0,5
	+) $a=2b \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 2\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 2x-1 = 4(x^2+1)$ $\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 5 = 0$ (vô nghiệm). Vậy $S = \{4 \pm \sqrt{11}\}$.	0,5
	2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 + y - x + xy & (1) \\ 7xy + y - x = 7 & (2) \end{cases}$	2,0
	+) $(2) \Rightarrow y - x = 7 - 7xy$ thay vào (1) ta được $x^3 + y^3 = 8 - 6xy$ $\Leftrightarrow x^3 + y^3 + 6xy - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+y)^3 - 8 + 6xy - 3xy(x+y) = 0$ $\Leftrightarrow (x+y-2)\left[(x+y)^2 + 2(x+y) + 4\right] - 3xy(x+y-2) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x+y-2)(x^2 + y^2 + 4 - xy + 2x + 2y) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ x^2 + y^2 + 4 - xy + 2x + 2y = 0 \end{cases}$	0,5
	+) $x+y-2=0 \Rightarrow y=2-x$ thay vào (2), ta được $7x(2-x) + 2 - 2x = 7$ $\Leftrightarrow 7x^2 - 12x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=\frac{5}{7} \Rightarrow y=\frac{9}{7} \end{cases}$	0,5
	+) $x^2 + y^2 + 4 - xy + 2x + 2y = 0$ $\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x+2)^2 + (y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x=y=-2$ (không thỏa mãn (2)). Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là: $(1;1)$ và $\left(\frac{5}{7}; \frac{9}{7}\right)$.	0,5
III. (2,0 điểm)	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m-1)x - m^2$, với m là tham số. Tìm các giá trị nguyên của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m-1)x_2 \leq 3m^2 + 20$.	2,0
	Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = 2(m-1)x - m^2$ $\Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0 (*)$ d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 - m^2 > 0$	0,5
	$\Leftrightarrow m < \frac{1}{2} (1)$. Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của d và $(P) \Rightarrow x_1 + x_2 = 2(m-1)$ và $x_1^2 = 2(m-1)x_1 - m^2$	0,5
	Ta có $x_1^2 + 2(m-1)x_2 \leq 3m^2 + 20 \Leftrightarrow 2(m-1)(x_1 + x_2) - m^2 \leq 3m^2 + 20$	0,5

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	$\Leftrightarrow 4(m-1)^2 - m^2 \leq 3m^2 + 20 \Leftrightarrow m \geq -2 \quad (2)$	
	Kết hợp (1) và (2) suy ra $-2 \leq m < \frac{1}{2}$. Vì m là số nguyên $m \in \{-2; -1; 0\}$.	0,5
IV. (1,5 điểm)	Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2^x + 33 = y^2$.	1,5
	+) Ta nhận thấy $x = 0$ không thỏa mãn. +) Nếu $x < 0$ thì 2^x là số không nguyên nên $2^x + 33 \neq y^2$ (với $y \in \mathbb{Z}$). +) Nếu $x = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $2^x = 2^{2k+1}$ chia 3 dư 2 nên $2^x + 33 \neq y^2$ (với $y \in \mathbb{Z}$) (vì bình phương của một số nguyên chia 3 dư 0 hoặc 1). +) Nếu $x = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), ta xét với $y > 0$ thì $2^x + 33 = y^2$	0,5
	$\Leftrightarrow (y-2^k)(y+2^k) = 33 = 1.33 = 3.11 \Leftrightarrow \begin{cases} y-2^k = 1 \\ y+2^k = 33 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y-2^k = 3 \\ y+2^k = 11 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} k=4 \\ y=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=17 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k=2 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases}$	0,5
	Vậy có bốn cặp số $(x; y)$ nguyên cần tìm là $(8; 17); (8; -17); (4; 7); (4; -7)$.	
V. (7,0 điểm)	Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . Đường thẳng AI cắt (O) tại điểm thứ hai là M . Đường tròn (I) tiếp xúc với hai cạnh BC, CA lần lượt tại hai điểm D và E . Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng BI và DE .	7,0
	1. Chứng minh $MB = MC = MI$.	1,75
	Ta có AM là phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ $\Rightarrow \text{sđ}\widehat{BM} = \text{sđ}\widehat{CM} \Rightarrow MB = MC \quad (1)$	
	$\widehat{MBC} = \widehat{MAC} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{MC} \right) \Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{MAB}$	
	Lại có BI là phân giác của góc $\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{IBC}$ $\Rightarrow \widehat{MBI} = \widehat{MBC} + \widehat{CBI} = \widehat{MAB} + \widehat{ABI}$	0,5
	Mà $\widehat{MIB} = \widehat{MAB} + \widehat{ABI}$ (tính chất góc ngoài của tam giác) $\Rightarrow \widehat{MBI} = \widehat{MIB} \Rightarrow \triangle MBI$ cân tại $M \Rightarrow MB = MI \quad (2)$	0,75
	Từ (1) và (2) suy ra $MB = MC = MI$ (đpcm).	
	2. Chứng minh tứ giác $AITE$ nội tiếp đường tròn.	1,75
	Ta có CD và CE là hai tiếp tuyến của $(I) \Rightarrow \triangle CDE$ cân tại C	0,5

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	$\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CED} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{ACB})$ Trong $\triangle TBD$, có $\widehat{TBC} + \widehat{BTD} = \widehat{EDC}$ (tính chất góc ngoài tam giác)	
	Mà BI là phân giác của $\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{TBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{ACB}) = \frac{1}{2}\widehat{ABC} + \widehat{BTD}$ $\Rightarrow \widehat{BTD} = \frac{1}{2}[180^\circ - (\widehat{ACB} + \widehat{ABC})] = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{IAE}$	0,75
	Mà $\widehat{BTD} + \widehat{ITE} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EAI} + \widehat{ITE} = 180^\circ$. Vậy tứ giác $AITE$ nội tiếp đường tròn.	0,5
	3. Kẽ đường kính AP của (O) và đường cao AH của tam giác ABC. Đường thẳng MP lần lượt cắt hai đường thẳng AH, BC tại hai điểm N, K. Chứng minh $MI^2 = MN.MK$.	2,0
	 Ta có AP là đường kính của $(O) \Rightarrow \widehat{PAC} + \widehat{APC} = 90^\circ$ Mà $\widehat{APC} = \widehat{ABC} (= \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AC}) \Rightarrow \widehat{PAC} + \widehat{ABC} = 90^\circ$ Lại có $\widehat{BAH} + \widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{PAC} = \widehat{BAH}$ Vì AI là phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{NAM} = \widehat{PAM}$ Mặt khác $AM \perp NP \Rightarrow \triangle ANP$ cân tại A và $MN = MP$ (3). Gọi AI cắt BC tại L Ta có $\widehat{MCL} = \widehat{MAC} (= \widehat{MAB}) \Rightarrow \triangle MCL \sim \triangle MAC$ (g-g) $\Rightarrow MC^2 = MA.ML \quad (4)$ Ta có $\widehat{MKB} = \frac{1}{2}\text{sđ}(\widehat{BM} - \widehat{CP}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{MP} = \widehat{MAP}$ $\Rightarrow \triangle MAP \sim \triangle MKL \text{ (g-g)} \Rightarrow MA.ML = MP.MK \quad (5)$ Từ (3), (4) và (5) $\Rightarrow MC^2 = MN.MK$, mà $MC = MI$ Vậy $MI^2 = MN.MK$ (đpcm).	0,5
	4. Đường thẳng PI cắt (O) tại điểm thứ hai là Q, hai đường thẳng AQ và BC cắt nhau tại điểm S. Chứng minh rằng nếu chu vi của tam giác ABC bằng $3BC$ thì I là trọng tâm của tam giác AKS.	1,5

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	ΔINK , có $IM \perp NK$ và $MI^2 = MN.MK$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{NIK} = 90^\circ$ Lại có $AH \perp BC \Rightarrow \widehat{NHK} = 90^\circ$ Suy ra tứ giác $NHIK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IHK} = \widehat{INK}$ Mà $\widehat{INK} = \widehat{IPM}$ và $\widehat{QAM} = \widehat{QPM} (= \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{QM})$ $\Rightarrow \widehat{IHK} = \widehat{QAM}$, mặt khác $\widehat{IHK} + \widehat{IHS} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{QAM} + \widehat{IHS} = 180^\circ$ $\Rightarrow AIHS$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AIS} = \widehat{AHS} = 90^\circ$	0,5
	Gọi U là trung điểm của $AS \Rightarrow \Delta AUI$ cân tại $U \Rightarrow \widehat{UAI} = \widehat{AIU}$ Ta lại có $\widehat{INK} = \widehat{MIK}$ (cùng phụ với $\widehat{IKN}$) $\Rightarrow \widehat{AIU} = \widehat{MIK}$ nên ba điểm U, I, K thẳng hàng hay điểm $I \in UK$. BI là phân giác của $\widehat{ABL} \Rightarrow \frac{IA}{IL} = \frac{AB}{LB}$	0,5
	AL là phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{LB}{BC} = \frac{AB}{AB+AC} = \frac{AB}{2BC}$ (Vì $AB+AC+BC=3BC \Rightarrow AB+AC=2BC$) $\Rightarrow LB = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \frac{IA}{IL} = 2$.	0,25
	Áp dụng hệ quả của định lý Thales, trong tam giác ASL với cát tuyến UIK Ta có $\frac{UA}{US} \cdot \frac{KS}{KL} \cdot \frac{IL}{IA} = 1 \Rightarrow KS = 2KL$ hay L là trung điểm của SK . Vậy I là trọng tâm của tam giác AKS (đpcm).	0,25
VI. (2,0 điểm)	Xét a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng: $\frac{b^2}{(ab+2)(2ab+1)} + \frac{c^2}{(bc+2)(2bc+1)} + \frac{a^2}{(ca+2)(2ca+1)} \geq \frac{1}{3}$	2,0
	Chứng minh $(x+2)(2x+1) \leq \frac{9}{4}(x+1)^2$ $\Leftrightarrow 4(2x^2+5x+2) \leq 9(x^2+2x+1) \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng), dấu “=” khi $x=1$. Áp dụng kết quả trên, ta có $(ab+2)(2ab+1) \leq \frac{9}{4}(ab+1)^2$ $\Rightarrow \frac{b^2}{(ab+2)(2ab+1)} \geq \frac{4}{9} \cdot \frac{b^2}{(ab+1)^2}$	0,5
	Tương tự ta cũng có: $\frac{c^2}{(bc+2)(2bc+1)} \geq \frac{4}{9} \cdot \frac{c^2}{(bc+1)^2}$ và $\frac{a^2}{(ca+2)(2ca+1)} \geq \frac{4}{9} \cdot \frac{a^2}{(ca+1)^2}$ $\Rightarrow VT \geq \frac{4}{9} \left[\frac{b^2}{(ab+1)^2} + \frac{c^2}{(bc+1)^2} + \frac{a^2}{(ca+1)^2} \right] \geq \frac{4}{27} \left(\frac{b}{ab+1} + \frac{c}{bc+1} + \frac{a}{ca+1} \right)^2$	0,5
	$\Leftrightarrow VT \geq \frac{4}{27} \left(\frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} \right)^2$ (với $a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x}$) (1)	0,5

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Chứng minh $\frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} \geq \frac{3}{2}$ (2) $\Leftrightarrow \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} + \frac{x^2}{y+z} \geq \frac{x+y+z}{2}$ (3).	
	Áp dụng $AM - GM$, ta có: $\frac{y^2}{z+x} + \frac{z+x}{4} \geq y$; $\frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq z$; $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq x$. Suy ra (3) luôn đúng. $\Rightarrow VT \geq \frac{4}{27} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1}{3}$ (đpcm). Dấu “=” khi $a = b = c = 1$.	0,5

-----HẾT-----