

ĐÁP ÁN: MÔN TOÁN- NGÀY 2

Bài 5. (7,0 điểm) . Tìm tất cả các hàm số $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho f đơn điệu và

$$[f(x) + f(y)]^2 = f(x^2 - y^2) + f(2xy) \text{ với mọi } x \geq y \geq 0.$$

Kí hiệu đẳng thức $[f(x) + f(y)]^2 = f(x^2 - y^2) + f(2xy)$ là (*).

Trong (*) cho $x = y = 0 \Rightarrow 4[f(0)]^2 = 2f(0) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

- Khả năng 1: $f(0) = \frac{1}{2}$. Cho $x = 1, y = 0$ trong (*) ta có: $\begin{cases} f(1) = \frac{1}{2} \\ f(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

• $f(1) = -\frac{1}{2}$, khi đó $f(1) < f(0)$ nên $f(x)$ đơn điệu giảm trên $\mathbb{R}$

Trong (*) cho $x = y = 1$ tìm được $f(2) = \frac{1}{2}$, khi đó $f(2) > f(1)$ nên $f(x)$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ là mâu thuẫn.

• $f(0) = \frac{1}{2}$. Xét dãy số $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 2x_n^2, \forall n \geq 1 \end{cases}$.

Trong (*) cho $x = y = x_n$ ta có: $4[f(x_n)]^2 = f(x_{n+1}) + \frac{1}{2}$.

Từ đó, bằng quy nạp ta chứng minh được: $f(x_n) = \frac{1}{2}, \forall n \geq 1$.

Do $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ và hàm $f(x)$ đơn điệu nên $f(x) = \frac{1}{2}, \forall x \geq 0$.

- Khả năng 2: $f(0) = 0$. Trong (*) cho $y = 0$ ta có: $[f(x)]^2 = f(x^2) \forall x \geq 0$.

Mặt khác cho $y = x$ trong (*) và để ý $f(0) = 0$ thu được: $4[f(x)]^2 = f(2x^2)$

suy ra: $4f(x) = f(2x) \forall x \geq 0$ (**)

Trong (*) thế $x = u + v, y = u - v$ và kết hợp với (**) ta có:

$$\begin{aligned} [f(u+v) + f(u-v)]^2 &= f(4uv) + f(2(u^2 - v^2)) \\ &= 4f(2uv) + 4f(u^2 - v^2) = 4[f(u) + f(v)]^2 \end{aligned}$$

Do đó: $f(u+v) + f(u-v) = 2[f(u) + f(v)] \forall u \geq v \geq 0$

Từ đó, bằng quy nạp ta có: $f(x) = f(1)x^2 \forall x \in \mathbb{Q}^+$ và $f(nx) = n^2f(x) \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ nên với mỗi $x \in [0, \infty)$ tồn tại hai dãy số hữu tỉ dương $\{x_n\}$ và $\{x'_n\}$ theo thứ tự đơn điệu tăng và đơn điệu giảm cùng hội tụ về x .

Khi đó do $f(x)$ đơn điệu nên:
$$\begin{cases} f(x_n) \leq f(x) \leq f(x'_n) \\ f(x_n) \geq f(x) \geq f(x'_n) \end{cases} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

Suy ra:
$$\begin{cases} f(1)x_n^2 \leq f(x) \leq f(1)x_n'^2 \\ f(1)x_n^2 \geq f(x) \geq f(1)x_n'^2 \end{cases} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

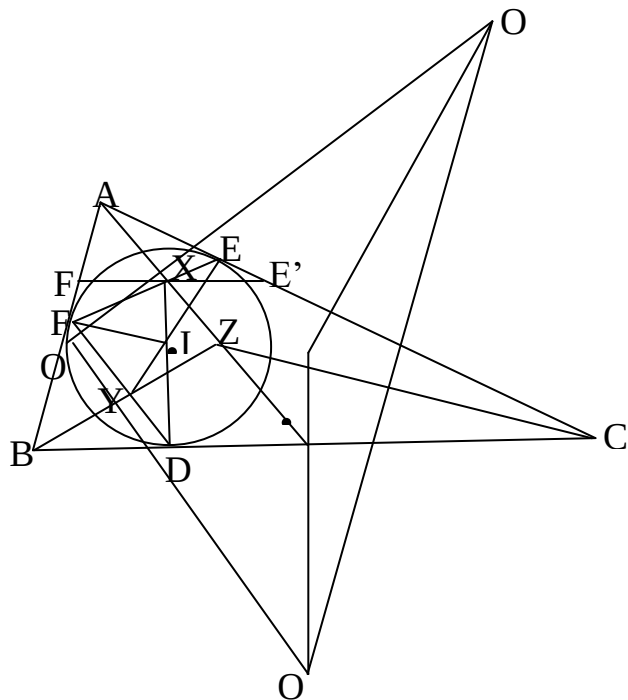
Cho $n \rightarrow +\infty \Rightarrow f(1)x^2 \leq f(x) \leq f(1)x^2 \Rightarrow f(x) = f(1)x^2 \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Mặt khác dễ dàng tìm được $f(1)$ bằng 0 hoặc 1 nên
$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = x^2 \end{cases} \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^+$$

Bài 6. (6,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC không cân ngoại tiếp đường tròn tâm I . Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh BC, CA, AB .

a) Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của ID với EF , IE với FD , AX với BY ; N_a, N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác ZBC, ZCA, ZAB . Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác $N_a N_b N_c$ thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC .



Kẻ đường thẳng qua X vuông góc với BC cắt AB, AC tại F', E' . Ta có $\angle IE'X = \angle IEX = \angle IFX = \angle IF'X$, suy ra tam giác $IE'F'$ cân tại I . Do đó: X là trung điểm $E'F'$. Theo tính chất hình thang ta có AX đi qua trung điểm BC . Tương tự BY đi qua trung điểm AC . Vì vậy, Z là trọng tâm tam giác ABC .

Gọi O, O_a, O_b, O_c lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, ZBC, ZCA, ZAB . Ta có: $O_b O_c, O O_a, O O_b, O O_c$ lần lượt vuông góc với ZA, BC, CA, AB mà ZA đi qua trung điểm BC nên theo tính chất chùm đường thẳng vuông góc ta có: $O O_a$ đi qua trung điểm $O_b O_c$, tương tự ta được O là trọng tâm $O_a O_b O_c$.

Bổ đề 1: Cho hai tam giác bất kỳ ABC và DEF . Các điểm X, Y, Z lần lượt chia các đoạn AD, BE, CF theo cùng một tỉ số k . Khi đó trọng tâm các tam giác ABC, DEF, XYZ thẳng hàng.

Gọi U là giao điểm khác A của AM với đường tròn đường kính AH và E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C. Do AM là đối trung của tam giác AEF nên AEUF là tứ giác điều hòa, do đó: $(HU, HA, HE, HF) = -1$, suy ra: HU, EF, BC đồng quy tại S.

Khi đó: $\overline{SB}.\overline{SC} = \overline{SF}.\overline{SE} = \overline{SH}.\overline{SU}$ nên U thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC.

Gọi N là trung điểm EF, do MK//OA nên M, K, N thẳng hàng. Gọi V là giao điểm của AM với EF. Ta có $\triangle AEF \sim \triangle ABC$, mà AV là đối trung của tam giác AEF và AD là đối trung của tam giác ABC nên $\angle ADB = \angle AVE = \angle NVM$ suy ra tứ giác NVMD nội tiếp, do đó: $\angle VDM = \angle MNV = 90^\circ$.

Mặt khác, do ME, MF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH nên $(A, U, V, M) = -1$, suy ra $(DA, DU, DV, DM) = -1$, vì vậy DM là phân giác ngoài của góc $\angle ADU$.

Từ đó ta có $\angle UDS = \angle ADM = \angle AVS$, suy ra tứ giác VUDS nội tiếp. Do đó,

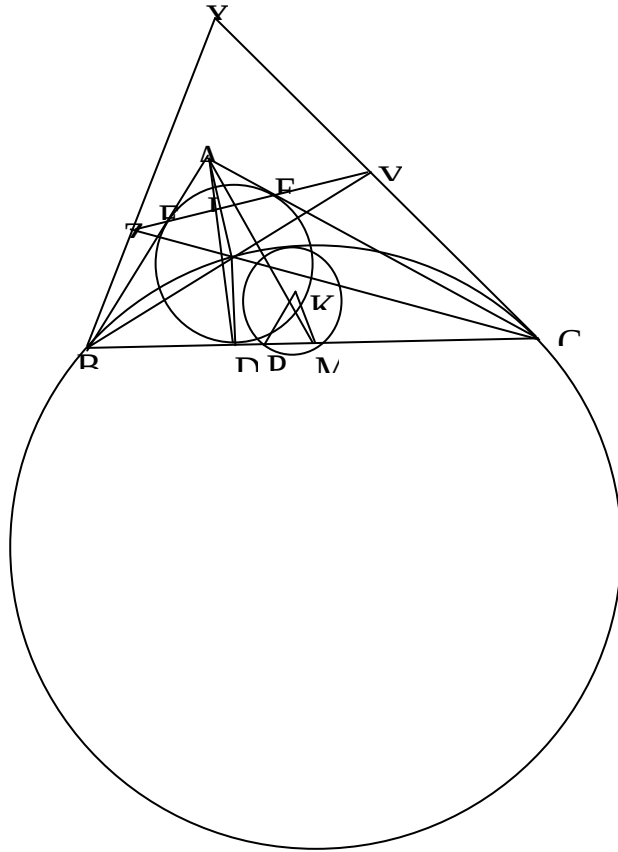
$$\angle DUM = \angle VSM = \frac{1}{2} \angle DKM \text{ suy ra U thuộc đường tròn (K, KM).}$$

Gọi T là trung điểm AH thì M, N, T thẳng hàng. Gọi W là giao điểm của tiếp tuyến tại A của đường tròn (ABC) với BC. Do AW//EF nên $MT \perp AW$, suy ra T là trực tâm tam giác AMW, do đó: WT là trung trực AU, vì vậy: $WA = WU$. Từ đó: $WU^2 = WA^2 = \overline{WB}.\overline{WC}$ nên WU là tiếp tuyến tại U của (BHC).

Mặt khác: AM và AD đẳng giác nên WA tiếp xúc với đường tròn (ADM), suy ra $WU^2 = WA^2 = \overline{WD}.\overline{WM}$, do đó WU là tiếp tuyến tại U của (K, KM).

Vậy đường tròn (K, KM) tiếp xúc với (BHC).

Trở lại bài toán:



Gọi Y, Z lần lượt là giao điểm IB, IC với EF. Gọi X là giao điểm của BZ và CY. Khi đó ta có: I là trực tâm tam giác XBC.

Do DL là đối trung của tam giác DEF và hai tam giác DEF và XBC đồng dạng nên

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{LF}}{\overline{EL}} = \frac{DF^2}{DE^2} = \frac{XB^2}{XC^2}, \text{ suy ra XP là đối trung của tam giác XBC.}$$

Mặt khác $AI \perp EF \Rightarrow MK \perp EF \Rightarrow MK \parallel XO'$ với O' là tâm đường tròn (XBC).

Áp dụng bổ đề 2 ta có (M,MK) tiếp xúc với (BIC).

Bài 7. (7,0 điểm)

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ ta xác định các dãy số nguyên dương (a_n) và (b_n) như sau

$$\frac{a_n}{b_n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \text{ với } (a_n, b_n) = 1, \text{ trong đó } (a, b) \text{ là kí hiệu ước chung lớn nhất}$$

của hai số nguyên a, b . Chứng minh rằng với $\forall N, T \in \mathbb{N}^*$ luôn tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ để với mọi $k = m + i, (i \in \{0; 1; \dots; T\})$ ta đều có $(a_k, N) = 1$.

Chứng minh. Trước hết chúng ta có bổ đề sau:

Bổ đề: Với giả thiết như bài toán ban đầu, giả sử k là một số nguyên dương thì $a_n \not\equiv p \forall n \in [p^k, 2p^k - 1]$, trong đó p là số nguyên tố bất kì lớn hơn 2.

Chứng minh.

Nhận xét: Nếu $a_n \not\equiv p$ thì $a_{np}, a_{np+1}, \dots, a_{np+p-1}$ cũng không chia hết cho p .

Thật vậy ta có:

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{mp+i} = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{1}{mp+i} + \frac{1}{mp+p-i} \right) = p(m+1) \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{(mp+i)(mp+p-i)}$$

Suy ra với mọi $i = \overline{0, p-1}$ thì:

$$\frac{a_{np+i}}{b_{np+i}} = \frac{pa}{b} + \frac{a_n}{pb_n} + \frac{r}{s} \text{ với } \frac{r}{s} = \frac{1}{np+1} + \frac{1}{np+2} + \dots + \frac{1}{np+i}.$$

Từ đó với chú ý b, s không chia hết cho p suy ra $a_{np+i} \not\equiv p \forall i = \overline{0, p-1}$

Nhận xét được chứng minh.

Từ nhận xét với chú ý rằng $a_1 \not\equiv p$ nên $a_p, a_{p+1}, \dots, a_{2p-1}$ đều không chia hết cho p .

Từ đó áp dụng tiếp nhận xét ta có: $a_{p^2}, a_{p^2+1}, \dots, a_{2p^2-1}$ đều không chia hết cho p .

Như vậy sau một số hữu hạn lần suy ra $a_{p^k}, a_{p^k+1}, \dots, a_{2p^k-1}$ cũng không chia hết cho p . Bổ đề được chứng minh.

Trở lại giải bài toán đã cho:

Chọn m thỏa mãn $2^k \leq m < 2^{k+1}$, khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{a_m}{b_m} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k-1} + \frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{a}{2^u b} + \frac{1}{2^k} = \frac{2^{k-u} + b}{2^k b} \end{aligned}$$

Suy ra $a_m \not\equiv 2$, trong đó $u < k$ và $\gcd(b, 2) = 1$.

Viết N lại dưới dạng sau: $N = 2^\alpha \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, ta sẽ chứng minh tồn tại một dãy số nguyên

dương $(r_i)_{i=1}^k$ và số nguyên dương m thỏa mãn $p_i^{\alpha_i} \leq m \leq 2p_i^{\alpha_i} - 1 - T$

Khi đó theo bổ đề thì $\gcd(a_{m+h}, p_i) = 1 \forall h = \overline{0, T}$ và $i = \overline{1, k}$.

Với chú ý khi t đủ lớn thì chọn được m để $m, m+1, \dots, m+T$ đều nằm trong đoạn $[2^t, 2^{t+1})$ nên $\gcd(a_{m+h}, 2) = 1 \forall h = \overline{0, T}$.

Áp dụng định lí Dirichlet ta có tồn tại vô số bộ $(p_0, r_1, r_2, \dots, r_k)$ thỏa mãn:

$$\begin{aligned} \left| p_0 \frac{1}{\ln p_i} - r_i \right| < \varepsilon &\Leftrightarrow |p_0 - r_i \ln p_i| < \varepsilon \ln p_i \\ \Rightarrow r_i \ln p_i < \varepsilon \ln p_i + p_0 < 2\varepsilon \ln p_i + r_i \ln p_i \\ &\Leftrightarrow r_i \ln p_i < \delta + p_0 < 2\delta + r_i \ln p_i \end{aligned}$$

trong đó $\delta = \varepsilon \ln p_i$

Bây giờ chọn p_0 đủ lớn thì $T+1 \leq \frac{p_i^{\alpha_i}}{4}$ suy ra $p_i^{\alpha_i} + T+1 \leq \frac{5}{4}p_i^{\alpha_i}$.

Mặt khác chọn $\delta > 0$ đủ nhỏ để $\ln \frac{5}{4} + 2\delta < \ln 2$, ta có:

$$\begin{aligned} \ln \frac{5}{4} + r_i \ln p_i < \delta + p_0 + \ln \frac{5}{4} < 2\delta + \ln \frac{5}{4} + r_i \ln p_i < \ln 2 + r_i \ln p_i \\ \Leftrightarrow \ln \frac{5}{4} p_i^{\alpha_i} < \delta + p_0 + \ln \frac{5}{4} < \ln 2 p_i^{\alpha_i} \end{aligned}$$

Rõ ràng tồn tại $\delta' > \delta > 0$ đủ nhỏ để $2\delta + \delta' + \ln \frac{5}{4} < \ln 2$, suy ra:

$$\ln \frac{5}{4} p_i^{\alpha_i} < \delta' + p_0 + \ln \frac{5}{4} < \ln 2 p_i^{\alpha_i}$$

Mặt khác theo một kết quả quen thuộc $\ln(u+1) - \ln u < \frac{1}{u} \forall u \in \mathbb{N}^*$, ta có thể chọn u đủ

lớn để $u > \frac{1}{\delta' - \delta}$ suy ra tồn tại vô số số nguyên dương u để $\ln(u+1) - \ln u < \delta' - \delta$. Do

đó tồn tại số nguyên dương k để:

$$\delta + p_0 + \ln \frac{5}{4} < \ln k < \delta' + p_0 + \ln \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{5}{4} p_i^{\varepsilon_i} < \ln k < \ln 2 p_i^{\varepsilon_i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4} p_i^{\varepsilon_i} < k < 2 p_i^{\varepsilon_i} \Rightarrow p_i^{\varepsilon_i} + T + 1 < k < 2 p_i^{\varepsilon_i}$$

Chọn $m = k$ ta có điều cần chứng minh.