

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1. (1,5 điểm)

a) Cho biểu thức : $P = \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + 1)}{1 - x} + \frac{(\sqrt{x} - 2)^2 + 3\sqrt{x} - x}{1 - \sqrt{x}}$, tìm điều kiện của x để $P < 8$

b) Cho $f(n) = \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})}$, tính $Q = f(1) + f(2) + \dots + f(40)$

Câu 2. (1,5 điểm)

a) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = mx + 4 (m \neq 0)$ và parabol $(P): y = 2x^2$. Gọi A, B là các giao điểm của (d) và (P) ; A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành. Tìm m để diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng $15 (cm^2)$ (đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimet)

b) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2y - y + x = 3xy \\ xy^2 + y^3 - x^3 = 3xy \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $(\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x})(6\sqrt{2x+6} - 2x - 13) = 6\sqrt{2}$

b) Chứng minh phương trình $x^2 - (m^2 - 1)x + m(m-1)^2 = 0$ (x là ẩn số) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m . Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho, giả sử $x_1 \leq x_2$, tìm m để x_2 đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt và A và B (điểm O nằm ngoài đường tròn (O')). Từ một điểm M trên tia đối của tia AB , vẽ các tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (O) , (C, D là các tiếp điểm và D nằm trong đường tròn (O')). Hai đường thẳng AC, AD cắt đường tròn (O') lần lượt tại E và F (E, F không trùng với A), hai đường thẳng CD và EF cắt nhau tại I

a) Chứng minh tứ giác $BCEI$ nội tiếp và $EI \cdot BD = BI \cdot AD$

b) Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng EF

c) Chứng minh khi M thay đổi trên tia đối của tia AB thì đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định

Câu 5. (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x và y thỏa mãn :

$$2021(x^2 + 2y^2) - 2020(2xy + y) = 2022$$

b) Cho x, y, z là ba số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{\sqrt{2x^2 - xy + 2y^2}}{x + y + 2z} + \frac{\sqrt{2y^2 - yz + 2z^2}}{y + z + 2x} + \frac{\sqrt{2z^2 - zx + 2x^2}}{z + x + 2y}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐKXD: $x \geq 0, x \neq 1$. Khi đó :

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{1-x} + \frac{(\sqrt{x}-2)^2 + 3\sqrt{x} - x}{1-\sqrt{x}}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{x-4\sqrt{x}+4+3\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{4-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{4}{1-\sqrt{x}}$$

Ta có $P < 8$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{1-\sqrt{x}} < 8 \Leftrightarrow \frac{1}{1-\sqrt{x}} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{1-\sqrt{x}} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-1 < \sqrt{x}-\frac{1}{2} < 0 \\ 0 < \sqrt{x}-1 < \sqrt{x}-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-\frac{1}{2} < 0 \\ 0 < \sqrt{x}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 1 < x \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $0 \leq x < \frac{1}{4}$ hoặc $x > 1$ thì $P < 8$

b) Ta có: $f(n) = \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{2\sqrt{4n^2-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)$

$$\Rightarrow Q = f(1) + f(2) + \dots + f(40)$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}} - \frac{1}{\sqrt{81}} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{9} \right) = \frac{4}{9}$$

Câu 2.

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm (d) và (P) ta có: $2x^2 = mx + 4$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - mx - 4 = 0$$

Nhận thấy $ac < 0 \Rightarrow pt$ luôn có 2 nghiệm phân biệt

Gọi tọa độ của $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), A'(x_1, 0), B'(x_2, 0)$

Theo định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m}{2} \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}|y_1 + y_2| \cdot |x_2 - x_1| = 15 \Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2) \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + 8} = 15$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{4} + 4 \right) \sqrt{\frac{m^2}{4} + 8} = 15$$

Đặt $\frac{m^2}{4} + 4 = t (t > 0)$ (2). Thì (1) tương đương với

$$t\sqrt{t+4} = 15 \Leftrightarrow t^3 + 4t^2 - 225 = 0 \Leftrightarrow (t-5)(t^2 + 9t + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow t-5=0 \Leftrightarrow t=5 \Rightarrow \frac{m^2}{4} + 4 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy $m \in \{2; -2\}$ thì thỏa đề

b) $\begin{cases} x^2y - y + x = 3xy & (1) \\ xy^2 + y^3 - x^3 = 3xy & (2) \end{cases}$. Trừ vế theo vế (1) và (2) ta có:

$$x^2y - y + x - xy^2 - y^3 + x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - y^3) + (x^2y - xy^2) + (x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + xy + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)[(x + y)^2 + 1] = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Thay $y = x$ vào (1) ta được:

$$x^3 - x + x = 3x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 3 \end{cases}$$

Vậy $(x; y) \in \{(0; 0); (3; 3)\}$

Câu 3.

a) Gpt: $(\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x})(6\sqrt{2x+6} - 2x - 13) = 6\sqrt{2} (-3 \leq x \leq 6)$

Ta có:

$$6\sqrt{2x+6} - 2x - 6 - 9 + 2 = 2 - (\sqrt{2x+6} - 3)^2 \leq 2$$

$$(\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x})^2 \leq (1+1)(x+3+6-x) = 18$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} \leq 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x})(6\sqrt{2x+6} - 2x - 13) \leq 6\sqrt{2} = VP$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x+3=6-x \\ \sqrt{2x+6}=3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} (tm\ dkxd)$

$$\text{Vậy } x = \frac{3}{2}$$

$$b) x^2 - (m^2 - 1)x + m(m - 1)^2 = 0$$

$$\Delta = (m^2 - 1)^2 - 4m(m - 1)^2 = (m - 1)^2 (m^2 + 2m + 1 - 4m)$$

$$= (m - 1)^2 (m - 1)^2 = (m - 1)^4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = (m - 1)^2$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm

$$x_1 = \frac{m^2 - 1 - (m - 1)^2}{2} = m - 1$$

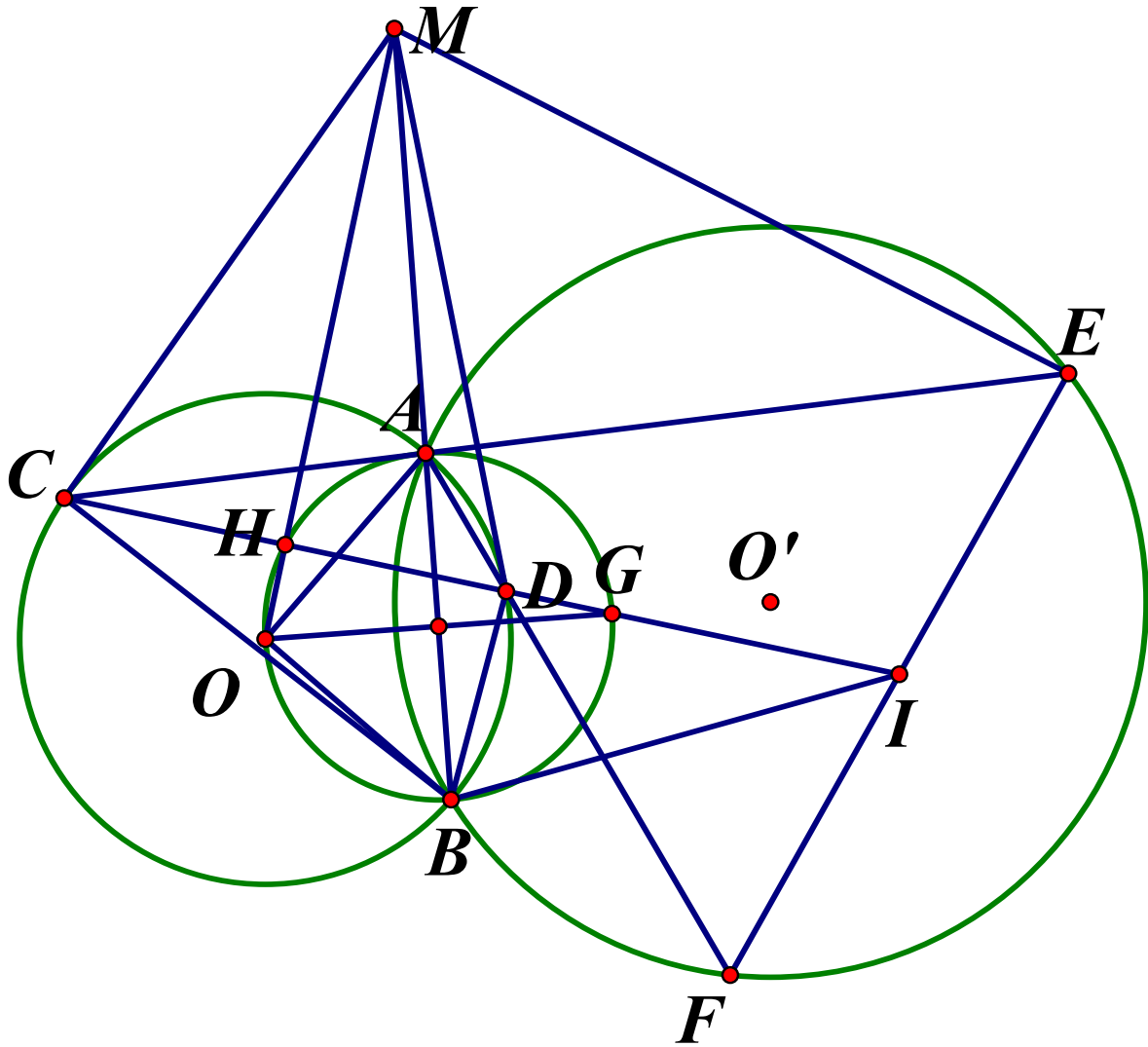
$$x_2 = \frac{m^2 - 1 + (m - 1)^2}{2} = m^2 - m$$

$$(Do \ x_2 - x_1 = m^2 - m - (m - 1) = (m - 1)^2 \geq 0)$$

$$\text{Ta lại có : } x_2 = m^2 - m = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow \min x_2 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{1}{2} \text{ thì } x_2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất là } -\frac{1}{4}$$

Câu 4.



a) Trong (O) : $\angle ICB = \angle BAD$, trong (O') : $\angle BAD = \angle BEF$

$\Rightarrow \angle ICB = \angle BEF \Rightarrow BCEI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle BIF = \angle ACB$

Ta có: $ADBC$ nội tiếp $\Rightarrow \angle ACB = \angle BDF \Rightarrow \angle BIF = \angle BDF \Rightarrow \angle ADB = \angle BIE$ (1)'

Mà $\angle BAD = \angle BEI$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle BIE \Rightarrow BD \cdot IE = BI \cdot AD$

b) Ta có; $\angle IFB = \angle BAC = \angle BDC \Rightarrow IFBD$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle IBF = \angle IDF = \angle ADC = \angle ABC \Rightarrow \triangle IFB \sim \triangle CAB$

Mặt khác: $\angle FIB = \angle FDB \Rightarrow \angle EIB = \angle ADB$ và $\angle IEB = \angle DAB \Rightarrow \triangle EIB \sim \triangle ADB$

Từ đó suy ra $\frac{IF}{IB} = \frac{CA}{CB} = \frac{AD}{DB} = \frac{IE}{IB} \Rightarrow IF = IE$

c) Gọi G là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, B của đường tròn và H là giao điểm của MO với CD . Khi đó H là trung điểm CD và $AGBO$ là tứ giác nội tiếp

Mặt khác, $OH \cdot OM = OD^2 = OA^2 = OB^2 \Rightarrow \triangle BOH \sim \triangle MOB \Rightarrow \angle BHO = \angle MBO = \angle BAO$
 $\Rightarrow AHOB$ nội tiếp hay 5 điểm G, A, B, H, O, B nội tiếp $\Rightarrow \angle GH O = \angle GAO = 90^\circ$,

Tức là $GH \perp OH$. Mà $OH \perp DH$ nên G, D, H, C thẳng hàng. Vậy CD luôn đi qua điểm G cố định là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, B của đường tròn (O)

Câu 5.

a) Ta có:

$$2021(x^2 + 2y^2) - 2020(2xy + y) = 2022$$

$$\Leftrightarrow 2020(x - y)^2 + x^2 + 2022y^2 - 2020y = 2022 \quad (1)$$

$$Th1: y \leq -1 \Rightarrow 2022y^2 - 2020y \geq 4042 \quad (VN)$$

$$Th2: y \geq 2 \Rightarrow 2022y^2 - 2020y > 2022y^2 - 2022y = 2022y(y - 1) \geq 2022y \geq 4022 \quad (VN)$$

$$Th3: y = 0 \Rightarrow 2020x^2 + x^2 = 2022 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2022}{2023} \notin \mathbb{Q}$$

$$Th4: y = 1 \Rightarrow 2020(x - 1)^2 + 2022 - 2020 + x^2 = 2022$$

$$\Leftrightarrow 2021x^2 - 4040x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (tm) \\ x = \frac{4040}{2021} \quad (ktm) \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (0; 1)$

b) Ta có: $\sqrt{2x^2 - xy + 2y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y)$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - xy + 2y^2 \geq \frac{3}{4}(x^2 + 2xy + y^2) \Leftrightarrow \frac{5}{4}(x - y)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng})$$

Vậy $S \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \sum \frac{x + y}{x + y + 2z}$. Đặt $\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + x = c \end{cases}$

$$\Rightarrow S \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \sum \frac{a}{b + c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum \frac{a^2}{ab + bc} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \sum \frac{(a + b + c)^2}{2(ab + bc + ca)} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$