

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN : TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút

Ngày thi: 27/09/2022

(Đề thi có 01 trang)

Bài 1 (4,0 điểm).

a) Xét các số thực a, b, c thay đổi trên đoạn $[1; 2]$ sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 4 \left(\frac{bc^2}{a+b} + \frac{ca^2}{b+c} + \frac{ab^2}{c+a} \right) + ab + bc + ca$.

b) Tồn tại hay không đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên thỏa mãn : $P(1 + \sqrt[3]{3}) = 2\sqrt[3]{3} + 4$ và $P(2 + \sqrt{6}) = 3 + \sqrt{6}$?

Bài 2 (3,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1 = 1$; $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n} + \frac{n}{u_n^4}$ với mọi n nguyên dương.

Chứng minh dãy số (y_n) với $y_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ (n nguyên dương) có giới hạn hữu hạn. Tính giới hạn đó.

Bài 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . H là hình chiếu vuông góc của D lên EF . Tia IH cắt đường tròn (O) tại K . Đường tròn ngoại tiếp hai tam giác KBF, KCE cắt nhau tại T khác K . Gọi M là trung điểm TD . Qua M kẻ tiếp tuyến MN của đường tròn (I) (N là tiếp điểm khác D).

a) Chứng minh T, E, F thẳng hàng và đường tròn ngoại tiếp tam giác NBC tiếp xúc (I) .

b) AN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác NBC ở S khác N . Hai tiếp tuyến của đường tròn (I) kẻ từ S cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác NBC lần lượt tại P, Q . Chứng minh hai đường thẳng PQ và BC song song với nhau.

Bài 4 (2,0 điểm). Kí hiệu $\mathbb{R}^+$ là tập hợp các số thực dương. Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sao cho với mọi số thực dương x, y thì $f(x + f(y)) = y f(1 + xy)$.

Bài 5 (3,0 điểm). Tìm tất cả số nguyên dương a và n cùng lớn hơn 1 sao cho $a^n - 1$ chia hết cho n^a .

Bài 6 (3,0 điểm). Hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là 2023 được chia thành 2023^2 ô vuông đơn vị. Ta kí hiệu (m, n) là ô ở hàng thứ m và cột thứ n . Người ta tô tất cả các ô vuông đơn vị bởi hai màu xanh, đỏ sao cho hai ô khác nhau đối xứng qua đường thẳng AC thì được tô khác màu. Gọi S là tập hợp các bộ ba số m, n, p đôi một khác nhau (không phân biệt thứ tự); $m, n, p \in \{1; 2; 3; \dots; 2023\}$ sao cho các ô $(m, n), (n, p)$ và (p, m) có cùng màu. Kí hiệu $|S|$ là số phần tử tập hợp S .

a) Tồn tại hay không cách tô màu sao cho $|S| = 0$?

b) Chứng minh rằng: $|S| \leq 1^2 + 2^2 + \dots + 1011^2$.

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:

Chữ kí CBCTh số 01:

Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN : TOÁN

(Hướng dẫn chấm có 08 trang)

Bài 1 (4,0 điểm).

Ý	Nội dung	Điểm
1.a (2,0)	Xét các số thực a, b, c thay đổi trên đoạn $[1; 2]$ sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 4\left(\frac{bc^2}{a+b} + \frac{ca^2}{b+c} + \frac{ab^2}{c+a}\right) + ab + bc + ca$.	
	Ta có $\frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq 2\sqrt{\frac{c^2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{4}} = c \Rightarrow \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{4c-a-b}{4}$.	0.5
	Do $a, b \in [1; 2] \Rightarrow b - 2a \leq 0$ $\Rightarrow \frac{4bc^2}{a+b} = \frac{4}{3}\left(\frac{b-2a}{a+b} + 2\right) \cdot c^2 = \frac{4}{3}(b-2a) \cdot \frac{c^2}{a+b} + \frac{8c^2}{3} \leq \frac{4}{3}(b-2a) \cdot \frac{4c-a-b}{4} + \frac{8c^2}{3}$	0.5
	$\Rightarrow \frac{4bc^2}{a+b} \leq \frac{2a^2 - b^2 + 8c^2 + ab - 8ac + 4bc}{3}$. Tương tự ta cũng có : $\frac{4ca^2}{b+c} \leq \frac{2b^2 - c^2 + 8a^2 + bc - 8ba + 4ca}{3}; \frac{4ab^2}{c+a} \leq \frac{2c^2 - a^2 + 8b^2 + ca - 8cb + 4ab}{3}$ Cộng các vế bất đẳng thức theo vế được : $4\left(\frac{4bc^2}{a+b} + \frac{4ca^2}{b+c} + \frac{4ab^2}{c+a}\right) \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)$	0.5
	$\Rightarrow P \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 18$. Với $a = b = c = \sqrt{2}$ thì $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ và $P = 18$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 18.	0.5
1.b (2,0)	Tồn tại hay không đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên thỏa mãn $P(1 + \sqrt[3]{3}) = 2\sqrt[3]{3} + 4$ và $P(2 + \sqrt{6}) = 3 + \sqrt{6}$?	
	Ta chứng minh với $T(x) \in \mathbb{Z}[x]$ mà $T(1 + \sqrt{6}) = 0$ thì tồn tại $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho $T(x) = (x^2 - 2x - 5)Q(x)$. Thật vậy: Do $T(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $x^2 - 2x - 5$ là đa thức monic hệ số nguyên nên tồn tại $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho $T(x) = (x^2 - 2x - 5)Q(x) + ax + b$. Thay $x = 1 + \sqrt{6} \Rightarrow a(1 + \sqrt{6}) + b = 0$ Nếu $a \neq 0 \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{-a-b}{a}$ là số hữu tỉ (Vô lí). Nếu $a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow T(x) = (x^2 - 2x - 5)Q(x)$.	0.5
	Ta chứng minh với $T(x) \in \mathbb{Z}[x]$ mà $T(\sqrt[3]{3}) = 0$ thì tồn tại $G(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho $T(x) = (x^3 - 3)G(x)$. Thật vậy: Do $T(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $x^3 - 3$ là đa thức monic hệ	

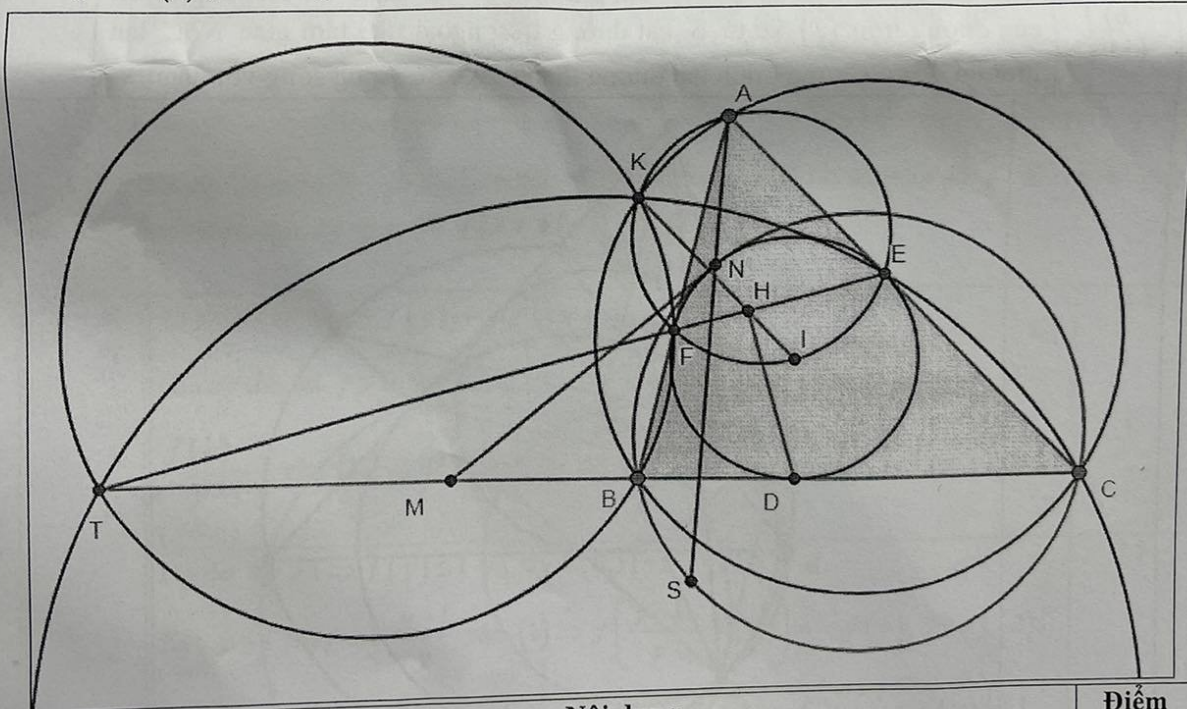
số nguyên nên tồn tại $G(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $a, b, c \in \mathbb{Z}$ sao cho $T(x) = (x^3 - 3)G(x) + ax^2 + bx + c. \text{ Thay } x = \sqrt[3]{3} \Rightarrow a\sqrt[3]{9} + b\sqrt[3]{3} + c = 0.$ + Nếu $a = 0 \Rightarrow b\sqrt[3]{3} + c = 0$. Nếu $b \neq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{3} = \frac{-c}{b}$ hữu tỉ (Vô lí) $\Rightarrow b = 0 \Rightarrow c = 0. \text{ Do đó } T(x) = (x^3 - 3)G(x).$ + Nếu $a \neq 0$. Ta thực hiện phép chia đa thức $x^3 - 3 = (ax^2 + bx + c)(mx + n) + px + q \text{ với } m, n, p, q \text{ là các số hữu tỉ.}$ Thay $x = \sqrt[3]{3} \Rightarrow p\sqrt[3]{3} + q = 0 \Rightarrow p = q = 0$ (vì $p \neq 0$ thì $\sqrt[3]{3} = \frac{-q}{p}$ là số hữu tỉ). Khi đó $x^3 - 3 = (ax^2 + bx + c)(mx + n)$ với $m = \frac{1}{a} \neq 0$. Vế phải là đa thức có nghiệm hữu tỉ $-\frac{n}{m}$ nhưng vế trái là đa thức có nghiệm thực duy nhất $\sqrt[3]{3}$ không phải là số hữu tỉ (Vô lí).	0.5
Áp dụng vào bài toán: Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ thỏa mãn bài toán. Xét đa thức $F(x) = P(x+1) - x - 2$ là đa thức hệ số nguyên $F(1 + \sqrt{6}) = P(2 + \sqrt{6}) - 3 - \sqrt{6} = 0 \Rightarrow \text{tồn tại } G(x) \in \mathbb{Z}[x] \text{ sao cho}$ $F(x) = (x^2 - 2x - 5)G(x) \Rightarrow P(x+1) = (x^2 - 2x - 5)G(x) + x + 2$ Xét đa thức $T(x) = P(x+1) - 2x - 4$ là đa thức hệ số nguyên và $T(\sqrt[3]{3}) = P(\sqrt[3]{3} + 1) - 2\sqrt[3]{3} - 4 = 0 \Rightarrow \text{tồn tại } Q(x) \in \mathbb{Z}[x] \text{ sao cho}$ $T(x) = (x^3 - 3)Q(x) \Rightarrow P(x+1) = (x^3 - 3)Q(x) + 2x + 4.$	0.5
Do đó ta có $(x^2 - 2x - 5)G(x) + x + 2 = (x^3 - 3)Q(x) + 2x + 4$ Thay $x = 2 \Rightarrow -5G(2) + 4 = 5Q(2) + 8 \Rightarrow 5(Q(2) + G(2)) = -4$ Vô lí vì $Q(2) \in \mathbb{Z}, G(2) \in \mathbb{Z}$ nên vế trái là bội của 5. Vậy không tồn tại đa thức $P(x)$ thỏa yêu cầu bài toán.	0.5

Bài 2 (3,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1; u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n} + \frac{n}{u_n^4}$ với mọi n nguyên dương. Chứng minh dãy số (y_n) với $y_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ (n nguyên dương) có giới hạn hữu hạn. Tính giới hạn đó.

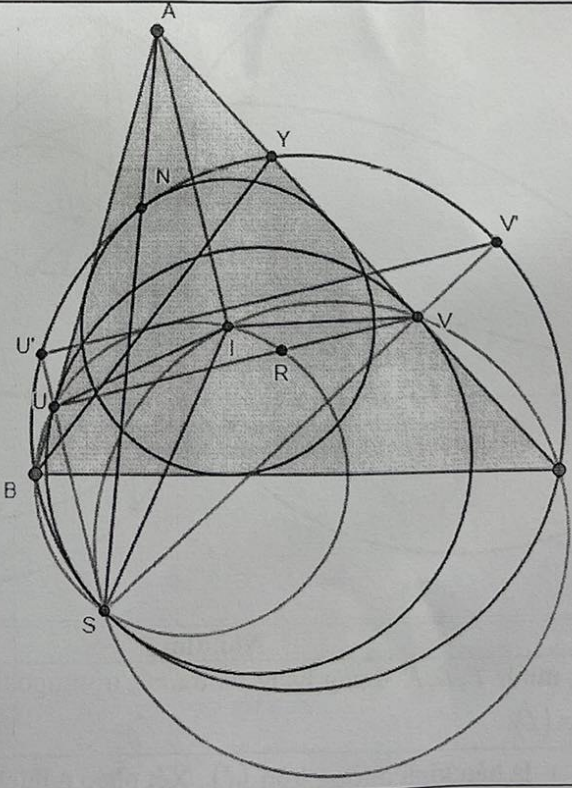
Ý	Nội dung	Điểm
	Ta có: $u_{n+1}^2 > \left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 4 + \frac{4}{u_n^2} > u_n^2 + 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow u_n^2 > (n-1)4 + u_1^2 = 4n-3, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim u_n = +\infty$	1.0
	$u_{n+1}^2 = \left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)^2 + 2\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \cdot \frac{n}{u_n^4} + \frac{n^2}{u_n^8}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 4 + \frac{4}{u_n^2} + \frac{2n}{u_n^3} + \frac{4n}{u_n^5} + \frac{n^2}{u_n^8}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	0.5

Do $\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{4}{u_n^2} = 0$. Mà $u_n^2 > 4n-3 \Rightarrow 0 < \frac{2n}{u_n^3} < \frac{2n}{4n-3} \cdot \frac{1}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ Và $\lim \left(\frac{2n}{4n-3} \cdot \frac{1}{u_n} \right) = \frac{1}{2} \lim \frac{1}{u_n} = 0 \Rightarrow \lim \frac{2n}{u_n^3} = 0$ (theo nguyên lý kẹp).	0.5
Ta cũng có $\lim \frac{4n}{u_n^5} = \lim \left(\frac{2n}{u_n^3} \right) \left(\frac{2}{u_n^2} \right) = 0$ và $\lim \frac{n^2}{u_n^8} = \lim \left(\frac{2n}{u_n^3} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4u_n^2} \right) = 0$ $\Rightarrow \lim (u_{n+1}^2 - u_n^2) = 4$.	0.5
Theo nguyên lý trung bình Cesaro $\Rightarrow \lim \frac{u_n^2}{n} = 4 \Rightarrow \lim \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 2$. Vậy $\lim y_n = 2$.	0.5

Bài 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . H là hình chiếu vuông góc của D lên EF . Tia IH cắt đường tròn (O) tại K . Đường tròn ngoại tiếp hai tam giác KBF, KCE cắt nhau tại T khác K . Gọi M là trung điểm TD . Qua M kẻ tiếp tuyến MN của đường tròn (I) (N là tiếp điểm khác D).



Ý	Nội dung	Điểm
a) (2,0)	Chứng minh T, E, F thẳng hàng và đường tròn ngoại tiếp tam giác NBC tiếp xúc (I) .	
	Kí hiệu r là bán kính đường tròn (I) . Xét phép nghịch đảo cực I , phương tích r^2 . Ta có $N_I^{r^2} : D \leftrightarrow D; E \leftrightarrow E; F \leftrightarrow F \Rightarrow N_I^{r^2}$ biến đường thẳng EF	

	thành đường tròn ngoại tiếp tam giác IEF (chính là đường tròn đường tròn đường kính IA). Để thấy $N_I^{r^2}$ biến A thành trung điểm EF, tương tự cũng biến B, C thành trung điểm $DF, DE \Rightarrow N_I^{r^2}$ biến (O) thành đường tròn Euler (ε) của tam giác DEF. Do $H \in EF \cap (\varepsilon)$ nên ảnh của H qua $N_I^{r^2}$ là giao của đường tròn đường kính IA và (O) (khác A). Tuy nhiên ảnh của H nằm trên tia $IH \Rightarrow K$ là ảnh của H qua $N_I^{r^2}$	0.5
	Như vậy K là giao của (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Gọi T' là giao điểm của $EF, BC \Rightarrow K$ là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $BCEF$. $AT' \Rightarrow T'$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp các tam giác $KBF, KCE \Rightarrow T' \equiv T \Rightarrow$ ba điểm T, E, F thẳng hàng.	0.5
	Ta có $AE = AF, BF = BD, CD = CE \Rightarrow \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1 \Rightarrow AD, BE, CF$ đồng qui $\Rightarrow (TD, BC) = -1$	0.5
	Theo hệ thức Newton $\Rightarrow MD^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MC}$. Mà $MD = MN \Rightarrow MN^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MC} \Rightarrow MN$ tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác $NBC \Rightarrow (I)$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác NBC tiếp xúc nhau tại N	0.5
b) (3,0)	AN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác NBC ở S khác N. Hai tiếp tuyến của đường tròn (I) kẻ từ S cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác NBC lần lượt tại P, Q. Chứng minh hai đường thẳng PQ, BC song song với nhau.	
		
	Ta dựng đường tròn (t) tiếp xúc với hai cạnh AB, AC tại U, V và tiếp xúc với cung BC không chứa N của đường tròn (NBC) tại S'. Xét ba đường	0.5

tròn (NBC) , (t) , (I) có các tâm vị tự ngoài lần lượt là A, N, S' nên theo định lí Monge Dalember thì A, N, S' thẳng hàng $\Rightarrow S' \equiv S$.	
Gọi Y là giao điểm của AC và (NBC) (Y khác C). R là tâm đường tròn nội tiếp tam giác YBC . Theo định lí Sawayama – The bault $\Rightarrow R$ nằm trên đường thẳng UV .	0.5
Ta có $\widehat{AUR} = \widehat{AUV} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BUR} = 180^\circ - \widehat{AUR} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ Lại có $\widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ $\Rightarrow \widehat{BUR} = \widehat{BIR} \Rightarrow$ tứ giác $BUIR$ nội tiếp.	0.5
Kẻ SU, SV cắt (NBC) tại $U', V' \Rightarrow V'$ là điểm chính giữa cung YC $\Rightarrow B, R, V'$ thẳng hàng. Do (t) tiếp xúc $(NBC) \Rightarrow U'V' \parallel UV$. Ta có $\widehat{SBR} = \widehat{SBV'} = \widehat{SU'V'} = \widehat{SUV} = \widehat{SUR} \Rightarrow SBUR$ nội tiếp. Do đó 5 điểm S, B, U, I, R cùng thuộc một đường tròn. Tức là S, B, U, I cùng thuộc đường tròn. Chứng minh tương tự S, C, V, I cùng thuộc đường tròn. Khi đó $\widehat{BSI} = \widehat{IUA}; \widehat{CSI} = \widehat{IVA}$ Mà U, V đối xứng qua đường thẳng $IA \Rightarrow \widehat{IUA} = \widehat{IVA}$. $\widehat{BSI} = \widehat{CSI}$ hay SI là phân giác $\widehat{BSC}$. Mặt khác SI cũng là phân giác $\widehat{PSQ} \Rightarrow \widehat{BSP} = \widehat{CSQ} \Rightarrow$ hai cung BP và CQ có số đo bằng nhau $\Rightarrow PQ \parallel BC$.	0.5

Bài 4 (2,0 điểm). Kí hiệu $\mathbb{R}^+$ là tập hợp các số thực dương. Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sao cho với mọi số thực dương x, y thì $f(x + f(y)) = yf(1 + xy)$.

Kí hiệu (1) $f(x + f(y)) = yf(1 + xy), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$. Giả sử tồn tại $y > 0, y \neq 1$ sao cho $\frac{f(y)-1}{y-1} > 0$. Khi đó thay x bởi $\frac{f(y)-1}{y-1}$ vào (1) và để ý rằng lúc đó $x + f(y) = 1 + xy$ nên suy ra $y = 1$ (Vô lí).	0.5
Do đó $\forall y > 1 \Rightarrow f(y) \leq 1$ và $\forall y \in (0; 1) \Rightarrow f(y) \geq 1$ Xét $y > 1$ thay $x = \frac{y-1}{y}$ vào (1) $\Rightarrow f\left(\frac{y-1}{y} + f(y)\right) = yf(y), \forall y > 1$ (2) Nếu $yf(y) > 1 \Rightarrow \frac{y-1}{y} + f(y) = 1 + f(y) - \frac{1}{y} > 1 \Rightarrow f\left(\frac{y-1}{y} + f(y)\right) \leq 1$ Mâu thuẫn với (2).	0.5
Nếu $yf(y) < 1 \Rightarrow \frac{y-1}{y} + f(y) = 1 + f(y) - \frac{1}{y} < 1 \Rightarrow f\left(\frac{y-1}{y} + f(y)\right) \geq 1$ Mâu thuẫn với (2)	0.5

Do đó ta có $f(y) = \frac{1}{y}, \forall y > 1$. Với $\forall y \in (0; 1]$. Thay $x = 1$ vào (1) $\Rightarrow f(1 + f(y)) = y f(1 + y), \forall y \in (0; 1]$	
Do $1 + f(y) > 1$ và $1 + y > 1 \Rightarrow f(1 + f(y)) = \frac{1}{1 + f(y)}$ và $f(1 + y) = \frac{1}{1 + y} \Rightarrow \frac{1}{1 + f(y)} = \frac{y}{1 + y} \Rightarrow f(y) = \frac{y}{1 + y} - 1 = \frac{1}{y}, \forall y \in (0; 1]$ Như vậy ta có $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Thử lại thấy đúng. Vậy bài toán có nghiệm hàm duy nhất là $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$	0.5

Bài 5 (3,0 điểm). Tìm tất cả số nguyên dương a và n cùng lớn hơn 1 sao cho $a^n - 1$ chia hết cho n^a .

Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của $n \Rightarrow \gcd(p-1; n) = 1$. Ta có $p n^a \Rightarrow p a^n - 1 \Rightarrow \gcd(p; a) = 1$ Theo định lý Fermat nhỏ thì $p a^{p-1} - 1$ $\Rightarrow p \gcd(a^n - 1; a^{p-1} - 1)$ mà $\gcd(a^n - 1; a^{p-1} - 1) = a^{\gcd(n; p-1)} - 1 = a - 1$ $\Rightarrow p a - 1$	0.5
Nếu p là số lẻ, do $p a - 1$ nên áp dụng bổ đề L.T.E ta được $v_p(a^n - 1) = v_p(a - 1) + v_p(n)$ mà $n^a a^n - 1 \Rightarrow v_p(a^n - 1) \geq v_p(n^a) = av_p(n)$ $\Rightarrow v_p(a - 1) \geq (a - 1)v_p(n) \geq a - 1$ do $v_p(n) \geq 1$ (vô lý vì $v_p(a - 1) < a - 1$)	0.5
Do đó $p = 2 \Rightarrow n$ là số chẵn $\Rightarrow a$ là số lẻ. Áp dụng bổ đề L.T.E trong trường hợp số nguyên tố là 2, ta có $v_2(a^n - 1) = v_2(a^2 - 1) + v_2(n) - 1$ Mà $n^a a^n - 1 \Rightarrow v_2(a^n - 1) \geq v_2(n^a) = av_2(n)$ $v_2(a^2 - 1) \geq 1 + (a - 1)v_2(n) \geq 1 + a - 1 = a$ do $v_2(n) \geq 1$. $\Rightarrow a^2 - 1 \geq 2^a$.	0.5
Ta chứng minh $2^k > k^2 - 1$ với mọi số nguyên $k \geq 4$ (*). Thật vậy với $k = 4$ hiển nhiên $2^4 = 16 > 4^2 - 1$ Giả sử $2^k > k^2 - 1$ với mọi số nguyên $k \geq 4$. Khi đó $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 - 2 = (k+1)^2 + k(k-2) - 3 \geq (k+1)^2 - 1$ (do $k \geq 4 \Rightarrow k(k-2) \geq 2$) $\Rightarrow$ (*) đúng.	0.5
Quay trở lại bài toán ta có $1 < a < 4$, mà a lẻ $\Rightarrow a = 3$. Khi đó do đẳng thức xảy ra nên $a = 3$ và $v_2(n) = 1$. Đặt $n = 2m$ với m là số nguyên dương lẻ. Ta có $(2m)^3 3^{2m} - 1 = 9^m - 1$.	0.5

Nếu $m > 1$. Gọi q là ước nguyên tố nhỏ nhất của m $\Rightarrow q$ lẻ và $\gcd(q-1; m) = 1$. Ta có $q \mid (2m)^3 \Rightarrow q \mid 9^m - 1 \Rightarrow \gcd(q; 9) = 1$ Áp dụng định lí Fermat nhỏ $\Rightarrow q \mid 9^{q-1} - 1$	
$\Rightarrow q \mid \gcd(9^m - 1; 9^{q-1} - 1) = 9^{\gcd(m; q-1)} - 1 = 9 - 1 = 8$ Vô lí vì q là số nguyên tố lẻ. Do đó ta phải có $m = 1 \Rightarrow n = 2$. Thử lại: $a = 3; n = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0.5

Bài 6 (3,0 điểm). Hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là 2023 được chia thành 2023^2 ô vuông đơn vị. Ta kí hiệu (m, n) là ô ở hàng thứ m và cột thứ n . Người ta tô tất cả các ô vuông đơn vị bởi hai màu xanh, đỏ sao cho hai ô khác nhau đối xứng qua đường thẳng AC thì được tô khác màu. Gọi S là tập hợp các bộ ba số m, n, p đôi một khác nhau (không phân biệt thứ tự); $m, n, p \in \{1; 2; 3; \dots; 2023\}$ sao cho các ô (m, n) , (n, p) và (p, m) có cùng màu. Kí hiệu $|S|$ là số phần tử tập hợp S .

a) (1,0)	Tồn tại hay không cách tô màu sao cho $ S = 0$?	
	Ta tô tất cả các ô vuông đơn vị nằm về một phía của AC bởi màu xanh, tất cả các ô ở phía còn lại tô màu đỏ. Dễ thấy khi đó hai ô khác nhau và đối xứng qua AC được tô khác màu.	0.5
	Cách tô này sẽ có $ S = 0$. Giả sử có 3 ô $(m; n)$, $(n; p)$ và $(p; m)$ cùng màu. Không giảm tính tổng quát giả sử $m = \min\{m; n; p\} \Rightarrow$ hai ô $(m; n)$ và $(p; m)$ nằm ở hai phía đường thẳng $AC \Rightarrow$ vô lí.	0.5
b) (2,0)	Chứng minh rằng: $ S \leq 1^2 + 2^2 + \dots + 1011^2$.	
	Xét Graph gồm $2k+1$ đỉnh được đánh số thứ tự $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2k+1}$. Với 2 đỉnh A_m, A_n bất kì ($m \neq n$) thì có hai ô vuông đơn vị $(m; n)$ và $(n; m)$ được tô khác màu nên trong đó chỉ có một ô được tô màu đỏ. Giả sử ô $(m; n)$ được tô màu đỏ, khi đó ta lập đường đi một chiều từ A_m đến A_n . Gọi T là tập hợp các bộ 3 số m, n, p không kể thứ tự sao cho 3 ô $(m; n)$, $(n; p)$ và $(p; m)$ không cùng màu. Ta có $ S + T = C_{2k+1}^3$.	0.5
	Xét một bộ 3 số m, n, p thuộc tập T . Trong 3 ô $(m; n)$, $(n; p)$ và $(p; m)$ có hai ô màu xanh, một ô màu đỏ hoặc hai ô màu đỏ một ô màu xanh. Giả sử là hai ô màu đỏ và một ô màu xanh (vì nếu ngược lại thì ta xét 3 ô $(n; m)$, $(m; p)$ và $(p; n)$). Không giảm tính tổng quát giả sử $(m; n)$, $(n; p)$ màu đỏ và $(p; m)$ màu xanh. Suy ra ta có các đường đi một chiều là A_m đến A_n ; A_n đến A_p và A_m đến A_p . Trong 3 đỉnh này luôn có đúng một đỉnh đi A_m và đúng một đỉnh đến A_p (là đỉnh có hai đường đi và đỉnh có hai đường đến).	0.5

Với mỗi $i \in \{1; 2; 3; \dots; 2k+1\}$ ta kí hiệu x_i và y_i là số đường đi từ đỉnh A_i và số đường đến đỉnh $A_i \Rightarrow x_i + y_i = 2k$. Khi đó với mỗi A_i luôn có $C_{x_i}^2$ bộ ba thuộc T và nhận A_i làm đỉnh đi và $C_{y_i}^2$ bộ ba thuộc T và nhận A_i làm đỉnh đến.	
Do đó $T = \sum_{i=1}^{2k+1} C_{x_i}^2 = \sum_{i=1}^{2k+1} C_{y_i}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2k+1} (C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2)$ Ta có $C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2 = \frac{x_i(x_i-1)}{2} + \frac{y_i(y_i-1)}{2} = \frac{x_i^2 + y_i^2}{2} - \frac{x_i + y_i}{2} \geq \left(\frac{x_i + y_i}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_i + y_i}{2}\right)$ $= k^2 - k.$ $\Rightarrow T \geq \frac{1}{2} \cdot (2k+1)(k^2 - k)$	0.5
Khi đó $ S = C_{2k+1}^3 - T \leq \frac{(2k+1)(2k)(2k-1)}{6} - \frac{(2k+1)(k)(k-1)}{2} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ Mà $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ $ S \leq 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2$ Cho $k=1011$ ta có kết quả bài toán.	0.5

-----HẾT-----