

Bài 1. (4 điểm) Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{7\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{x}-2}$ Với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P khi $x = 9 - 4\sqrt{5}$.

b) Tính giá trị của x khi $P = \frac{1}{2}$.

Bài 2. (4 điểm) 1) Cho đường thẳng (d): $mx + (2m - 3)y = 6$ (m là tham số).

a) Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m.

b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ điểm A(2;-3) đến đường thẳng (d) lớn nhất.

2) Lúc 10 giờ, anh Hòa đi xe máy từ A đến B, đi được $\frac{2}{3}$ quãng đường thì xe bị hỏng nên phải dừng lại 50 phút để sửa xe rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu là 10km/h và đến B lúc 13 giờ 20 phút cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy đi trên $\frac{2}{3}$ quãng đường đầu không đổi và vận tốc $\frac{1}{3}$ quãng đường sau cũng không đổi. Hỏi anh Hòa bị hỏng xe lúc mấy giờ? Biết quãng đường AB dài 90 km.

Bài 3. (5 điểm) a) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC). Biết diện tích hai tam giác ABH và ACH lần lượt là 9cm^2 và 36cm^2 . Tính độ dài đường cao AH.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 64x^3y^3 + 27 = 18y^2 \\ 16x^2y + 12x = y^2 \end{cases}$$

c) Giải phương trình $\sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1} = \frac{2x-11}{3}$

Bài 4. (5 điểm) Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O; R). trên cung BC không chứa điểm A lấy điểm D bất kỳ (D khác B, C). Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC), kẻ BE vuông góc AD (E thuộc AD). Gọi K là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh rằng tứ giác ABHE nội tiếp và HE song song với DC.

b) Chứng minh rằng $DB + DC = DA$.

c) Tìm vị trí của điểm D để biểu thức $\frac{15}{DA} + \frac{3}{DK} + 2024 \left(\frac{1}{DB} + \frac{1}{DC} \right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5. (2 điểm) a) Tìm các bộ số nguyên dương (x; y; z) thỏa mãn $\frac{x - y\sqrt{2009}}{y - z\sqrt{2009}}$ là số hữu tỉ và

$x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.

a) Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn $ab + bc + cd + da = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$$

-----Hết-----

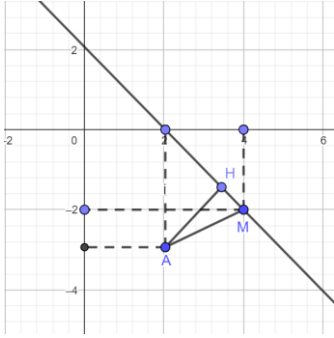
Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....

Chữ ký giám thị 1:.....

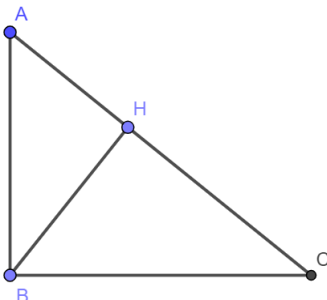
HƯỚNG DẪN CHÀM KỲ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH KHỐI 9

NĂM HỌC 2024-2025

Bài	Đáp án	Biểu điểm
Bài 1 4 điểm	Bài 1. Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{7\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{x}-2}$ Với $x \geq 0, x \neq 1$. a) Rút gọn biểu thức P. b) Tính giá trị của P khi $x = 9 - 4\sqrt{5}$. b) Tính giá trị của x khi $P = \frac{1}{2}$.	
	a) $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{7\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{x}-2}$ Với $x \geq 0, x \neq 1$.	
	$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{7\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$	0,25
	$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) + 3(\sqrt{x}-1) - (7\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$	0,25
	$P = \frac{x + 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 3 - 7\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$	0,25
	$P = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$	0,25
	$P = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$	0,25
	$P = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+2)}$	0,5
	Với $x \geq 0, x \neq 1$. thì $P = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+2)}$	0,25
b)	b) Với $x = 9 - 4\sqrt{5}$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$). Thay vào P ta có:	
	$P = \frac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}-1}{(\sqrt{9-4\sqrt{5}}+2)}$	0,25
	$P = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}-1}{(\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+2)}$	0,25
	$P = \frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}} = \frac{5-3\sqrt{5}}{5}$	0,25

	Vậy với $x \geq 0, x \neq 1$. thì $P = \frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}}$	0,25
c)	c) Với $P = \frac{1}{2}$ thì $\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{2}$	0,25
	$\Rightarrow 2(\sqrt{x}-1) = \sqrt{x}+2$	0,25
	$\Rightarrow 2\sqrt{x}-2 = \sqrt{x}+2$	0,25
	$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 4$	
	$\Leftrightarrow x = 16$ Thỏa mãn điều kiện đề bài	0,25
Bài 2 4 điểm	Bài 2. 1) Cho đường thẳng (d): $mx + (2m-3)y = 6$ (m là tham số). a) Tìm điểm cố định mà đường thẳng(d) luôn đi qua với mọi m. b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ điểm A(2;-3) đến đường thẳng (d) lớn nhất.	
1 điểm	1) Cho đường thẳng (d): $mx + (2m-3)y = 6$ (m là tham số) Gọi $M(x_M; y_M)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m. Ta có: $mx_M + (2m-3)y_M = 6 \forall m$	0,25
	$\Leftrightarrow mx_M + 2my_M - 3y_M = 6 \forall m$	
	$\Leftrightarrow m(x_M + 2y_M) = 3y_M + 6 \forall m$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y_M + 6 = 0 \\ x_M - 2y_M = 0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -2 \\ x_M = 4 \end{cases}$	0,25
	Vậy $M(4; -2)$ là tọa độ điểm cố định cần tìm	0,25
1,5 điểm	b) Ta có hình vẽ minh họa 	
	Do $A(2; -3), M(4; -2)$ cố định nên AM không đổi	
	Gọi $y = ax + b (a, b \in R, a \neq 0)$ là phương trình đường thẳng AM	
	$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ 4a + b = -2 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} (t / m) \\ b = -4 \end{cases}$	

	Vậy phương trình đường thẳng AM là $y = \frac{1}{2}x - 4$	0,25
	Kẻ AM vuông góc với (d) tại H nên AH là độ dài từ A đến (d)	
	$\Rightarrow AH \leq AM$ (Quan hệ đường vuông góc và đường xiên)	
	Mà AM không đổi nên dấu “=” xảy ra khi H trùng M	
	$\Leftrightarrow AM \perp (d)$ tại M	
	Ta có (d) $mx + (2m - 3)y = 6$	0,25
	$\Leftrightarrow mx - 6 = (3 - 2m)y$	
	Với $m = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}x - 6 = 0 \Rightarrow x = 4$ (Không t/m)	
	Với $m \neq \frac{3}{2} \Rightarrow (d): \frac{m}{3 - 2m}x - \frac{6}{3 - 2m} = y$	0,25
	Vì $AM \perp (d)$ tại m $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{3 - 2m} = -1$	0,25
	$\Leftrightarrow m = (2m - 3) \cdot 2$	
	$\Leftrightarrow m = 4m - 6$	0,25
	$\Leftrightarrow m = 2(t / m)$	
	Vậy m=2 là giá trị thỏa mãn	
Bài 2 1,5 điểm	2)Lúc 10 giờ, anh Hòa đi xe máy từ A đến B, đi được $\frac{2}{3}$ quãng đường thì xe bị hỏng nên phải dừng lại 50 phút để sửa xe rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu là 10km/h và đến B lúc 13 giờ 20 phút cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy đi trên $\frac{2}{3}$ quãng đường đầu không đổi và vận tốc $\frac{1}{3}$ quãng đường sau cũng không đổi. Hỏi anh Hòa bị hỏng xe lúc mấy giờ? Biết quãng đường AB dài 90 km.	
	Gọi vận tốc anh Hòa đi $\frac{2}{3}$ quãng đường đầu là x (km/h; x > 0)	0,25
	Nên $\frac{2}{3}$ quãng đường đầu anh Hòa đi là $90 \cdot \frac{2}{3} = 60$ km	0,25
	Vậy thời gian anh Hòa đi $\frac{2}{3}$ quãng đường đầu là $\frac{60}{x}$ (giờ)	
	Do $\frac{1}{3}$ quãng đường còn lại dài là $90 - 60 = 30$ km với vận tốc kém vận tốc lúc đầu là 10 km/h. Vậy thời gian anh Hòa đi $\frac{1}{3}$ quãng đường còn lại là: $\frac{30}{x - 10}$ (giờ)	0,25
	Thời gian anh Hòa đi quãng đường AB là $13h20' - 10h = 3h20'$	
	Đổi $3h 20' = \frac{10}{3}h$; $50' = \frac{5}{6}h$	
	Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{60}{x} + \frac{5}{6} + \frac{30}{x - 10} = \frac{10}{3}$	0,25
	Giải phương trình ta có x = 40 km/h	0,25
	Vậy thời gian anh đi $\frac{2}{3}$ quãng đường đầu là : $\frac{60}{40} = \frac{3}{2}$ (h)	

	Anh Hòa hỏng xe lúc $10 + \frac{3}{2} = \frac{23}{2}$ hay 11 giờ 30 phút	0,25
Bài 3 5 điểm	Bài 3. a) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC). Biết diện tích hai tam giác ABH và ACH lần lượt là 9cm^2 và 36cm^2 . Tính độ dài đường cao AH.	
1 điểm		
	Do $AH \perp BC$ tại H $\Rightarrow S_{ABH} = \frac{AH \cdot BH}{2} = 9(\text{cm}^2)$ $\Rightarrow AH \cdot BH = 18$	0,25
	$S_{ACH} = \frac{AH \cdot CH}{2} = 36(\text{cm}^2)$ $\Rightarrow AH \cdot CH = 72$	0,25
	$\Rightarrow AH^2 \cdot BH \cdot CH = 1296$	0,25
	$\Delta ABC (A = 90^\circ)$ có AH là đường cao $\Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH$	
	$\Rightarrow AH^4 = 1296$ $\Rightarrow AH = 6(\text{cm})$	0,25
2 điểm	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 64x^3y^3 + 27 = 18y^2 \\ 16x^2y + 12x = y^2 \end{cases}$	
	Xét $y = 0 \Rightarrow$ không thỏa mãn	
	Xét $y \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 64x^3 + \frac{27}{y^3} = 18 \\ 16\frac{x^2}{y} + 12\frac{x}{y^2} = 1 \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 64x^3 + \frac{27}{y^3} = 18(1) \\ 144\frac{x^2}{y} + 108\frac{x}{y^2} = 27(2) \end{cases}$	0,25
	Từ (1)(2)	0,25

	$\Rightarrow \left(4x + \frac{3}{y}\right)^3 = 27$ $\Leftrightarrow 4x + \frac{3}{y} = 3$ $\Leftrightarrow 4x = 3 - \frac{3}{y}$	
	Thay vào (1) ta được: $\left(3 - \frac{3}{y}\right)^3 + \frac{27}{y^3} = 18$	0,25
	$\Leftrightarrow 27 - \frac{81}{y} + \frac{81}{y^2} - \frac{27}{y^3} + \frac{27}{y^3} = 18$	
	$\Leftrightarrow \frac{81}{y^2} - \frac{81}{y} + 9 = 0$ $\Leftrightarrow \frac{9}{y^2} - \frac{9}{y} + 1 = 0$	0,25
	Đặt $\frac{1}{y} = a$ ta có phương trình $9a^2 - 9a + 1 = 0$	0,25
	Giải phương trình ta có $a_1 = \frac{-9 + \sqrt{45}}{18}; a_2 = \frac{-9 - \sqrt{45}}{18}$	0,25
	$\Rightarrow y_1 = \frac{6}{-3 + \sqrt{5}}; y_2 = \frac{6}{-3 - \sqrt{5}}$	
	Với $y_1 = \frac{6}{-3 + \sqrt{5}} \Rightarrow x = \frac{9 - \sqrt{5}}{8}$	0,25
	Với $y_2 = \frac{6}{-3 + \sqrt{5}} \Rightarrow x_2 = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{8}$	0,25
2 điểm	c) Giải phương trình $\sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1} = \frac{2x-11}{3}$	
	Điều kiện: $x \geq \frac{8}{3}$	0,25
	$\Leftrightarrow 3\sqrt{3x-8} - 3\sqrt{x+1} = 2x-11$ $\Leftrightarrow 3\sqrt{3x-8} - (3x-4) + x+7 - 3\sqrt{x+1} = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x^2 - 11x + 24) \left(\frac{-9}{3\sqrt{3x-8} + 3x-4} + \frac{1}{x+7+3\sqrt{x+1}} \right) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 11x + 24) = 0(*) \\ \left(\frac{-9}{3\sqrt{3x-8} + 3x-4} + \frac{1}{x+7+3\sqrt{x+1}} \right) = 0(**) \end{cases}$	0,25
	Giải (*) $x_1 = 8; x_2 = 3(t / m)$	0,25

	Giải (**) $\left(\frac{-9}{3\sqrt{3x-8}} + \frac{1}{x+7+3\sqrt{x+1}}\right) = 0$	
	$\Leftrightarrow \frac{9}{3\sqrt{3x-8}} = \frac{1}{x+7+3\sqrt{x+1}}$	0,25
	$\Leftrightarrow 9x + 63 + 27\sqrt{x+1} = 3\sqrt{3x-8} +$	
	$\Leftrightarrow 9x + 63 + 27\sqrt{x+1} - 3\sqrt{3x-8} = 0$	
	$\Leftrightarrow 3x - 8 - 3\sqrt{3x-8} + \frac{9}{4} + \frac{243}{4} + 3x + 27\sqrt{x+1} = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-8} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{243}{4} + 3x + 27\sqrt{x+1} = 0$	0,25
	Phương trình vô nghiệm vì $x \geq \frac{8}{3}$	
	Vậy nghiệm của phương trình là $x_1 = 8; x_2 = 3$	0,25
Bài 4 5 điểm	Bài 4. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O; R). trên cung BC không chứa điểm A lấy điểm D bất kỳ (D khác B, C). Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC), kẻ BE vuông góc AD (E thuộc AD). Gọi k là giao điểm của AD và BC. d) Chứng minh rằng tứ giác BHE nội tiếp và HE song song với DC. e) Chứng minh rằng $DB + DC = DA$. Tìm vị trí của điểm D để biểu thức $\frac{15}{DA} + \frac{3}{DK} + 2024\left(\frac{1}{DB} + \frac{1}{DC}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.	
2 điểm	a) Ta có $\angle AEB = \angle AHB = 90^\circ$ $\Rightarrow$ Tứ giác AEHB nội tiếp Do tứ giác AEHB nội tiếp $\Rightarrow \angle ABH = \angle HEK$ Mà $\angle ABH = \angle ABC = \angle ADC$ $\Rightarrow \angle HEK = \angle ADC$ mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow HE \parallel DC$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,5 0,25 0,25
1,5 điểm	b) Trên DA lấy điểm M sao cho $DM = DC$ $\Rightarrow \triangle DMC$ cân tại M Mà $\angle MDC = \angle ADC = \angle ABC = 60^\circ$ $\Rightarrow \triangle MDC$ đều	0,25 0,25

	$\Rightarrow MD = MC$ và $MCD = 60^0$	
	Có $ACB = MCD (60^0)$	0,25
	$\Rightarrow ACM + MCB = MCB + BCD$	
	$\Rightarrow ACM = BCD$	0,25
	$\Rightarrow \triangle ACM = \triangle BCD (cgc)$	
	$\Rightarrow AM = BD$	0,25
	$\Rightarrow BD + DC = DM + AM = AD$	0,25
1,5 Điểm	c) Có $\frac{1}{DB} + \frac{1}{DC} \geq \frac{4}{DB + DC} = \frac{4}{AD} \geq \frac{4}{2R} = \frac{2}{R}$	0,25
	Có $\frac{15}{AD} + \frac{3}{DK} = 3 \left(\frac{5}{DA} + \frac{1}{DK} \right) = 3 \left(\frac{1}{DA} + \frac{4DK + DA}{DA \cdot DK} \right)$	0,25
	$\frac{15}{AD} + \frac{3}{DK} = 3 \left(\frac{1}{DA} + \frac{4DK + DA}{DA \cdot DK} \right) \geq 3 \left(\frac{1}{2R} + \frac{4}{\sqrt{DA \cdot DK}} \right)$	0,25
	$AK \cdot AD = AC^2$ $\Rightarrow AD \cdot DK = AD^2 - AK \cdot AD = AD^2 - AC^2 \leq 4R^2 - AC^2$	0,25
	Vì $\triangle ABC$ đều nội tiếp đường tròn (O;R) vậy $AC = R\sqrt{3}$	
	$\Rightarrow AD \cdot DK \leq R^2$	0,25
	$\Rightarrow \frac{4}{\sqrt{DA \cdot DK}} \geq \frac{4}{\sqrt{R^2}} = \frac{4}{R}$	
	$\Rightarrow \frac{15}{DA} + \frac{1}{DK} \geq 3 \left(\frac{1}{2R} + \frac{4}{R} \right) = \frac{27}{2R}$	0,25
	Dấu “=” xảy ra khi D là chính giữa cung BC nhỏ	
Bài 5 2 điểm	Bài 5. a) Tìm các bộ số nguyên dương (x; y; z) thỏa mãn $\frac{x - y\sqrt{2009}}{y - z\sqrt{2009}}$ là số hữu tỉ và $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.	
1 điểm	a) Do $\frac{x - y\sqrt{2009}}{y - z\sqrt{2009}}$ là số hữu tỉ.	
	$\Rightarrow \frac{x - y\sqrt{2009}}{y - z\sqrt{2009}} = \frac{m}{n} (m, n \in \mathbb{Z}); (m, n) = 1$	
	$\Leftrightarrow nx - ny\sqrt{2009} = my - zm\sqrt{2009}$	
	$\Leftrightarrow nx - my = (ny - zm)\sqrt{2009} (3)$	0,25
	Nếu $ny - zm \neq 0$	
	$\Rightarrow (ny - zm)\sqrt{2009} \in I$	
	Mà $nx - my \in \mathbb{Q}$ nên loại trường hợp này	
	$\Rightarrow \begin{cases} ny - mz = 0 \\ nx - my = 0 \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} nxy - zmx = 0 \\ nxy - my^2 = 0 \end{cases}$	

	$\Rightarrow zmx = my^2$	0,25
	$\Rightarrow xz = y^2$	
	Có $x^2 + y^2 + z^2 = (x+z)^2 - 2xz + y^2 = (x+z)^2 - y^2 = (x+z-y)(x+y+z)$	
	Do $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố Mà $x-y+z < x+y+z$ ($x, y, z \in N^*$)	0,25
	$\Rightarrow x-y+z=1$	
	$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x+y+z$	
	Mà $x^2 > x; y^2 > y; z^2 > z$ (vì $x, y, z \in N^*$)	
	$\Rightarrow x=y=z=1$	0,25
	Vậy $(x;y;z)=(1;1;1)$ thỏa mãn đề bài	
1 điểm	b) Đặt $A = \frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c}$	
	$= \frac{a^4}{ab+ac+ad} + \frac{b^4}{ba+bc+bd} + \frac{c^4}{cd+ca+cb} + \frac{d^4}{da+db+dc} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{2(ab+bc+cd+da+bd+cd)}$	0,25
	$A \geq \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)}{2(ab+bc+cd+da+bd+cd)}$	0,25
	Có $(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq \frac{2}{3}(ab+bc+cd+da+bd+cd)$	
	$\Rightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 \geq 0$ (luôn đúng)	
	Lại có $(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq ab+bc+cd+da$	0,25
	$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq 2ab+2bc+2cd+2da$	
	$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 \geq 0$ (luôn đúng)	
	$\Rightarrow A = \frac{\frac{2}{3}(ab+bc+cd+da)}{2} = \frac{1}{3}$	02,5
	Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=d=1$	

- Trên đây là hướng dẫn chấm, mọi cách giải khác đúng vẫn cho điểm tối đa
- Điểm toàn bài không làm tròn điểm
- Sai hoặc không vẽ hình không chấm bài hình.