

Đáp án

1. Lưu ý rằng nếu $x \geq -1$ thì $(x+1)(x-2)^2 \geq 0$, hay

$$x^3 + 4 \geq 3x^2.$$

Thay x bằng $a_1, a_2, \dots, 100$ rồi cộng tất cả các bất đẳng thức lại ta thu được

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{100}^3 + 4 \cdot 100 \geq 3(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2).$$

Vì thế

$$a_1^2 + \dots + a_{100}^2 \leq \frac{399}{3} = 133.$$

Dấu " $=$ " đạt được, chẳng hạn với $a_1 = a_2 = \dots = a_{11} = 8, a_{12} = a_{13} = \dots = a_{100} = -1$. Vậy, giá trị lớn nhất cần tìm là 133.

2. Gọi A là phép biến đổi một số $3x+1$ thành x và B, C tương ứng là các phép biến đổi số $2x, 2x+1$ thành x . Ta sẽ chỉ ra bằng quy nạp rằng với mọi số nguyên dương n , bằng cách thực hiện các phép biến đổi A, B, C ta luôn thu được số 1.

Với $n=1$ thì ta không có gì phải chứng minh. Giả sử kết luận đúng với các số nguyên dương $1, 2, \dots, n-1$. Ta sẽ chỉ ra rằng kết luận cũng đúng với n .

Giả sử $n=3k$. Thế thì bằng các phép biến đổi C và A ta lần lượt thu được $6k+1, 2k$. Như vậy, ta chỉ cần áp dụng giả thiết quy nạp cho $2k$ để có điều phải chứng minh.

Giả sử $n=3k+1$. Khi đó phép biến đổi A cho số k . Áp dụng giả thiết quy nạp cho k ta lại có điều phải chứng minh.

Cuối cùng, giả sử $n=3k+2$. Áp dụng lần lượt các phép biến đổi B và A ta lần lượt thu được $6k+4, 2k+1$. Áp dụng giả thiết quy nạp cho $2k+1$ ta có điều phải chứng minh.

Lưu ý rằng, lời giải thực ra cho một thuật toán để thu được n .

3. Với $a = 1$, kết luận là đúng vì $1 + 2 + 3 = 6$ là ước của $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$.
Ta giả sử $a \geq 2$. Đặt $1 + 2^a + 3^a = 2^r 3^s m$, trong đó r, s, m là các số tự nhiên và $m \geq 1$ nguyên tố cùng nhau với 6. Đặt $k = \phi(m)$. Khi đó, $2^k - 1$ và $3^k - 1$ chia hết cho m theo định lý Euler. Vì thế, với mọi số nguyên dương n ta có $2^{nk} - 1$ và $3^{nk} - 1$ đều chia hết cho m . Nhận xét rằng với mọi số tự nhiên n , ta có $3^{2n} + 1 = (3^n)^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ và

$$3^{2n+1} + 1 = (3 + 1)(3^{2n} - 3^{2n-1} + \dots + 1) = 4 \cdot (2M + 1),$$

với M là một số nguyên dương lẻ, dẫn đến $3^{2n+1} + 1 \equiv 4 \pmod{8}$. Suy ra $r = 1$ nếu a là số chẵn và $r = 2$ nếu a là số lẻ. Mặt khác, để ý rằng $3^a < 1 + 2^a + 3^a < 2 \cdot 3^a$ (do $1 + 2^a < 3^a$ vì $a > 1$) nên $3^a \nmid 1 + 2^a + 3^a$, dẫn đến $s < a$. Vì thế $2^a + 1$ chia hết cho 3^s .

Bây giờ, ta chọn $b = a + 2ka$. Thế thì

$$\begin{aligned} 1 + 2^b + 3^b &= (1 + 2^a + 3^a) + (3^b - 2^a) + (2^b - 2^a) \\ &= (1 + 2^a + 3^a) + 2^a(2^{2ka} - 1) + 3^b(3^{2kb} - 1). \end{aligned}$$

Mà $2^{ka} - 1 \vdots 2^k - 1 \vdots m$, $3^{ka} - 1 \vdots 3^k - 1 \vdots m$ nên $1 + 2^b + 3^b$ chia hết cho m . Mặt khác, 3^b chia hết cho 3^s (do $b > a > s$) và $2^{2ka} - 1 \vdots 2^{2a} - 1 = (2^a - 1)(2^a + 1) \vdots 2^a + 1 \vdots 3^s$ nên $1 + 2^b + 3^b$ chia hết cho 3^s . Cuối cùng, do 2^a và $(3^{2kb} - 1)$ chia hết cho 4 nên $1 + 2^b + 3^b \equiv (1 + 2^a + 3^a) \pmod{4}$, chứng tỏ $1 + 2^b + 3^b$ chia hết cho 2^r . Từ đó suy ra $1 + 2^b + 3^b$ chia hết cho $1 + 2^a + 3^a$. Bài toán được giải quyết.

4. a) Gọi K là giao điểm của (Y) và (Z) .

Từ đó suy ra, ta có $JY \perp KB'$, $JZ \perp KC'$ nên $(JY, JZ) \equiv (KB', KC') \equiv (TB', TC') \equiv (TB, TC) \equiv (AB, AC) \equiv (KF, KE) \equiv (XY, XZ) \pmod{\pi}$.

Suy ra $J \in (XYZ)$. Vậy (XYZ) , $(K; 2r)$, (O) đồng quy tại J .