

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn thi: TOÁN (Ngày thứ nhất)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Bài 1. Cho m, n là các số nguyên dương phân biệt và p là số nguyên tố sao cho mn là ước của $m^2 + n^2 + pm$. Chứng minh rằng m là số chính phương hoặc mn là tổng của hai số chính phương.

Bài 2. Cho k là số nguyên, $k \neq 2$, $P(x)$ là đa thức với các hệ số hữu tỷ. Giả sử số thực a là nghiệm của phương trình $x^3 - kx + 1 = 0$ (*). Xét dãy (a_n) như sau: $a_1 = P(a)$, $a_{n+1} = P(a_n)$, $\forall n \geq 1$. Chứng minh rằng nếu a_1 là nghiệm của (*) thì a_n cũng là nghiệm của (*), $\forall n \geq 1$.

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ADC, BDC . N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB . Kẻ $NL \perp CD$ ($L \in CD$). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của OH, OK . Chứng minh rằng LN là phân giác của $\angle ILJ$.

Bài 4. Hỏi có tồn tại hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ song ánh sao cho với mọi bộ 3 số tự nhiên phân biệt a, b, c tạo thành một cấp số cộng thì $f(a), f(b), f(c)$ không tạo thành một cấp số cộng?

———— HẾT ————