

Câu 1. (2,0 điểm)

(a) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x-4}{2x+3\sqrt{x}-2} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{4x-1} \right) \left(x\sqrt{x} + 2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$. Tìm điều kiện của x để A xác định và rút gọn biểu thức A .

(b) Trên kệ có 10 quyển sách khác nhau, trong đó có 5 quyển sách Toán, 3 quyển sách Văn và 2 quyển sách Lí. Lấy ngẫu nhiên hai quyển sách từ kệ trên. Tính xác suất để lấy được hai quyển sách Toán.

Câu 2. (2,0 điểm)

(a) Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho độ dài AB ngắn nhất.

(b) Giải phương trình $(13-4x)\sqrt{2x-3} + (4x-3)\sqrt{5-2x} = 2 + 8\sqrt{16x-4x^2-15}$.

Câu 3. (2,0 điểm)

(a) Cho a, b là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh $ab - a - b + 1$ chia hết cho 192.

(b) Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 3xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = \frac{yz}{x^3(z+2y)} + \frac{zx}{y^3(x+2z)} + \frac{xy}{z^3(y+2x)}.$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AO với BC, BO với CA, CO với AB . Chứng minh rằng

(a) Tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

(b) $DH \cdot DA = DF \cdot DE$.

(c) $AM + BN + CP \geq \frac{9R}{2}$.

Câu 5. (1,0 điểm) Tô màu mỗi điểm trong mặt phẳng bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ, mỗi điểm được tô bởi đúng một màu. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng mà hai đầu mút và trung điểm của nó được tô bởi cùng một màu.

HẾT

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN NĂM 2025-2026

Thực hiện: Đội tuyển HSGQG Toán trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn năm học 2023-2024

Nguyễn Hoàng Việt, Nguyễn Minh Tuấn, Nguyễn Phương Thảo

Nguyễn Văn Chính, Phạm Công Hoàng, Vương Thành Nam.

Câu 1. (2,0 điểm)

(a) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x-4}{2x+3\sqrt{x}-2} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{4x-1} \right) \left(x\sqrt{x}+2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$. Tìm điều kiện của x để A xác định và rút gọn biểu thức A .

(b) Trên kệ có 10 quyển sách khác nhau, trong đó có 5 quyển sách Toán, 3 quyển sách Văn và 2 quyển sách Lí. Lấy ngẫu nhiên hai quyển sách từ kệ trên. Tính xác suất để lấy được hai quyển sách Toán.

Lời giải.

$$(a) \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ 2x+3\sqrt{x}-2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x > 0 \\ (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2) \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Vì $\sqrt{x}+2 > 0$ với mọi $x > 0$ nên từ (1) ta có $2\sqrt{x}-1 \neq 0$ hay $x \neq \frac{1}{4}$. Vậy $x > 0$ và $x \neq \frac{1}{4}$.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x-4}{2x+3\sqrt{x}-2} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{4x-1} \right) \left(x\sqrt{x}+2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \left[\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)} \right] (x\sqrt{x}+2) \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= \left[\frac{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)} \right] \frac{(x\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}} \\ &= \left[\frac{2x-3\sqrt{x}-2}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)} \right] \frac{(x\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \frac{(x\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

(b) Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

Gọi A là biến cố: "Lấy được hai quyển sách toán." Khi đó số phần tử thuận lợi cho biến cố A : $n(A) = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}.$$

□

Câu 2. (2,0 điểm)

- (a) Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho độ dài AB ngắn nhất.
- (b) Giải phương trình $(13 - 4x)\sqrt{2x - 3} + (4x - 3)\sqrt{5 - 2x} = 2 + 8\sqrt{16x - 4x^2 - 15}$.

Lời giải.

- (a) Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = mx + 3$ hay $x^2 - mx - 3 = 0$.

Ta có $\Delta = (-m)^2 - 4.1.(-3) = m^2 + 12 > 0 \forall m$. Vậy d luôn cắt (P) tại hai điểm A và B phân biệt. Giả sử $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$. Theo định lí Viète ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + [(mx_2 + 3) - (mx_1 + 3)]^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2(1 + m^2) = [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2](1 + m^2) \\ &= (m^2 + 12)(1 + m^2) = m^4 + 13m^2 + 12 \geq 12 \forall m. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = 0$. Vậy với $m = 0$ thì AB nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$.

- (b) Điều kiện: $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$. Đặt $u = \sqrt{2x - 3} \geq 0$ và $v = \sqrt{5 - 2x} \geq 0$. Khi đó $u^2 + v^2 = 2$ (1) và phương trình ban đầu trở thành

$$\begin{aligned} (7 - 2u^2)u + v(7 - 2v^2) &= 2 + 8uv \\ \Leftrightarrow 7(u + v) - 2(u^3 + v^3) - 8uv - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 7(u + v) - 2[(u + v)^3 - 3uv(u + v)] - 4[(u + v)^2 - 2] - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (u + v)^3 - 4(u + v)^2 + (u + v) + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 & (2) \\ u + v = -1 & (3) \\ u + v = 2 & (4) \end{cases} \end{aligned}$$

- Từ (1) và (2) suy ra $uv = \frac{(u + v)^2 - 2}{2} = \frac{7}{2}$. Từ (2) với $v = 3 - u$ ta có

$$\frac{7}{2} = uv = u(3 - u) = u^2 - 3u \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{\sqrt{23} + 3}{2} \Rightarrow v = \frac{-\sqrt{23} + 2}{2} < 0 \text{ (Loại)} \\ u = \frac{-\sqrt{23} + 2}{2} < 0 \text{ (Loại)} \end{cases}$$

- Từ (1) và (3) suy ra $uv = \frac{(u + v)^2 - 2}{2} = \frac{-1}{2} < 0$ (Loại)

- Từ (1) và (4) suy ra $uv = \frac{(u + v)^2 - 2}{2} = \frac{7}{2} = 1$. Từ (4) với $v = 2 - u$ ta có

$$1 = uv = u(2 - u) \Leftrightarrow u = 1 \Rightarrow v = 1 \Rightarrow x = 2. \text{ (Thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.



Câu 3. (2,0 điểm)

(a) Cho a, b là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh $ab - a - b + 1$ chia hết cho 192.

(b) Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 3xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = \frac{yz}{x^3(z+2y)} + \frac{zx}{y^3(x+2z)} + \frac{xy}{z^3(y+2x)}.$$

Lời giải.

(a) Do a, b là hai số chính phương lẻ liên tiếp, giả sử a, b có dạng $(2x+1)^2, (2x+3)^2$.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= ab - a - b - 1 \\ &= (a-1)(b-1) = [(2x+1)^2 - 1][(2x+3)^2 - 1] \\ &= 2x(2x+2)(2x+2)(2x+4) \\ &= 2^4 x(x+1)(x+1)(x+2). \end{aligned}$$

Do $x, x+1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên tích của chúng chia hết cho 2, tương tự $(x+1)(x+2)$ chia hết cho 2.

Mặt khác $x, x+1, x+2$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên tích chia hết cho 3.

Suy ra A chia hết cho 2^6 và 3 mà 64 và 3 là hai số nguyên tố cùng nhau nên A chia hết cho 192.

(b) Ta có: $x + y + z = 3xyz \iff \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = 3 \iff ab + bc + ca = 3$. (Với $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$)

Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \\ &= \frac{a^4}{ba+2ca} + \frac{b^4}{cb+2ab} + \frac{c^4}{ac+2bc} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(ab+bc+ca)} \\ &\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3(ab+bc+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{3} = 1. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1 \iff x = y = z = 1$.



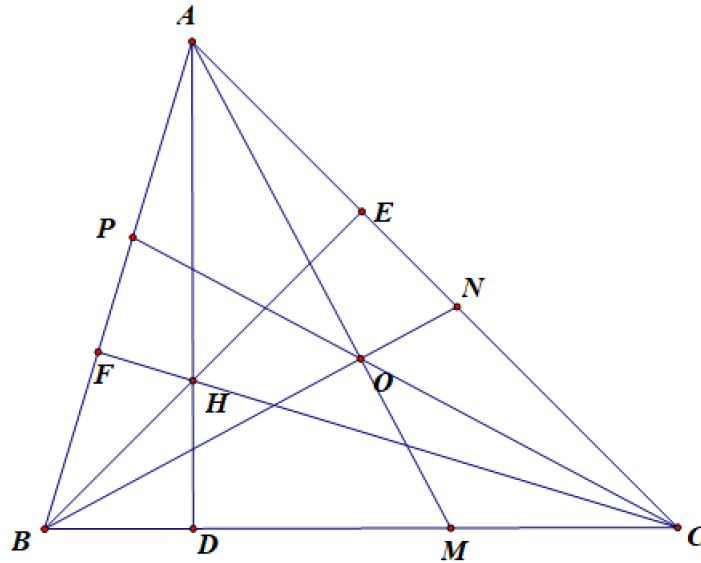
Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AO với BC, BO với CA, CO với AB . Chứng minh rằng

(a) Tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

(b) $DH \cdot DA = DF \cdot DE$.

(c) $AM + BN + CP \geq \frac{9R}{2}$.

Lời giải.



(a) Ta có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ và hai góc cùng chắn cạnh BC nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

(b) Tương tự, ta cũng chứng minh được các tứ giác $BFHD$ và $CEHD$ nội tiếp. Chú ý rằng $\widehat{FBH} = \widehat{ECH}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) ta có

$$\widehat{FDH} = \widehat{FBH} = \widehat{ECH} = \widehat{EDH}.$$

Bằng cách tương tự ta cũng có $\widehat{EAH} = \widehat{DBH} = \widehat{DFH}$.

Suy ra $\triangle DHF \sim \triangle DEA$ (g.g). Do đó $\frac{DH}{DF} = \frac{DE}{DA}$ hay $DH \cdot DA = DF \cdot DE$.

(c) Ta có

$$\frac{OA}{AM} = \frac{S_{OAC}}{S_{MAC}} = \frac{S_{OAB}}{S_{MAB}} = \frac{S_{OAB} + S_{OAC}}{S_{MAC} + S_{MAB}} = \frac{S_{OAB} + S_{OAC}}{S_{ABC}}.$$

Tương tự ta cũng có $\frac{OB}{BN} = \frac{S_{OBC} + S_{OAB}}{S_{ABC}}$ và $\frac{OC}{CP} = \frac{S_{OCA} + S_{OAC}}{S_{ABC}}$.

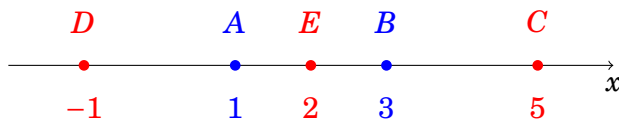
Chú ý rằng $OA = OB = OC = R$ nên

$$2 = R \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} \right) \geq \frac{9R}{AM + BN + CP} \Leftrightarrow AM + BN + CP \geq \frac{9R}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Câu 5. (1,0 điểm) Tô màu mỗi điểm trong mặt phẳng bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ, mỗi điểm được tô bởi đúng một màu. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng mà hai đầu mút và trung điểm của nó được tô bởi cùng một màu.

Lời giải. Xét các điểm này nằm trên mặt phẳng Oxy , khi đó luôn tồn tại hai điểm cùng màu nhau.



Không mất tính tổng quát, giả sử điểm $A(1,0)$, $B(3,0)$ đều được tô màu xanh.

Giả sử điều cần chứng minh là sai, tức không có ba điểm nào thẳng hàng và cách đều nhau cùng màu. Ta lấy các điểm $C(5,0)$, $D(-1,0)$, $E(2,0)$.

Khi này

- B là trung điểm AC nên C được tô màu đỏ.
- A là trung điểm BD nên D được tô màu đỏ.
- E là trung điểm AB nên E được tô màu đỏ.

Mặt khác E là trung điểm DC mà E, D, C đều màu đỏ (mâu thuẫn với điều giả sử).

Vậy ta có đều phải chứng minh.

7

HẾT