

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH
NĂM HỌC 2022-2023

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài : 150 phút

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 2$ và $ab + bc + ca = a^2b^2c^2$

Tính giá trị biểu thức $A = \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2}$

b) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b + ab = 1$

Chứng minh rằng $\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}$

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình : $2(3x+1) + \frac{7}{x} = 5\sqrt{2x+7}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}(1-3y) - y + 3 = 0 \\ y(y - \sqrt{x+1}) + x = 0 \end{cases}$

Câu 3. (1,5 điểm)

a) Tìm số nguyên n để $A = (n^2 + 3n + 2)^2 + (n + 2)^2$ là số chính phương

b) Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn $|a-b| + |b-c| + |c-d| + |d-a| = a^{2022} + 2023$.

Tìm số dư khi chia a^{12} cho 16

Câu 4. (2,5 điểm) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B . Trên tia đối của tia AB lấy điểm M , kẻ các tiếp tuyến ME, MF với đường tròn (O') , trong đó E, F thuộc đường tròn (O') , F nằm trong đường tròn (O) . Hai đường thẳng AE và AF cắt đường tròn (O) lần lượt tại P và Q (P, Q khác A). Tia EF cắt PQ tại K

a) Chứng minh tam giác BKP đồng dạng với tam giác BFA

b) Gọi I và J lần lượt là giao điểm của AB với OO' và EF . Chứng minh $\angle IJE = \angle IFM$

c) Chứng minh $PQ = 2\sqrt{OA^2 - OK^2}$

Câu 5. (1,0 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3abc$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $P = \frac{1}{1+a+2bc} + \frac{1}{1+b+2ac} + \frac{1}{1+c+2ab}$

Câu 6. (0,5 điểm) Lớp 9A có 34 học sinh, các học sinh lớp này đều tham gia một số câu lạc bộ của trường. Mỗi học sinh của lớp tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kỳ của lớp này thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh rằng có 1 câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh lớp 9A tham gia

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

c) Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 2$ và $ab + bc + ca = a^2b^2c^2$

Tính giá trị biểu thức $A = \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2}$

$$\text{Ta có } \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 2 \Rightarrow \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} + 2\left(\frac{1}{ab^2c} + \frac{1}{abc^2} + \frac{1}{a^2bc}\right) = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} = 4 - \frac{2(ab + bc + ca)}{a^2b^2c^2} = 4 - \frac{2a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2} = 2$$

Vậy $A = 2$

d) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b + ab = 1$

Chứng minh rằng $\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}$

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}} \Leftrightarrow \frac{(a+b)(1+ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(a+b) = \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b)^2 = 1+a^2+b^2+a^2b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+4ab = 1+a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 = (ab-1)^2 \text{ (đúng vì } a+b=1-ab), (đpcm)$$

Câu 2. (2,5 điểm)

c) Giải phương trình : $2(3x+1) + \frac{7}{x} = 5\sqrt{2x+7}$

Điều kiện $x \geq -\frac{7}{2}; x \neq 0$

Phương trình đã cho tương đương $6x^2 + 2x + 7 - 5x\sqrt{2x+7} = 0$

$$\Leftrightarrow (3x - \sqrt{2x+7})(2x - \sqrt{2x+7}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+7} = 3x \\ \sqrt{2x+7} = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x+7 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1(tm) \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = 2x+7 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{29}}{4}(tm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ 1; \frac{1+\sqrt{29}}{4} \right\}$$

d) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+1}(1-3y) - y + 3 = 0 \\ y(y - \sqrt{x+1}) + x = 0 \end{cases}$$

Điều kiện $x \geq -1$. Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \geq 0$. Thay vào hệ phương trình đã cho, ta có :

$$\begin{cases} t(1-3y) - y + 3 = 0 \\ y(y-t) + t^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - y - 3ty + 3 = 0 \\ y^2 - ty + t^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-y) - 3ty + 3 = 0 \\ (t-y)^2 + ty - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(t-y)^2 + (t-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = t \Rightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} (tm) \\ y = t + \frac{1}{3} \Rightarrow 9t^2 + 3t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 + \sqrt{33}}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1 + \sqrt{33}}{18} \\ y = \frac{1 + \sqrt{33}}{6} \end{cases} (tm) \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm là $(x; y) \in \left\{ (0; 1); \left(-\frac{1 + \sqrt{33}}{18}; \frac{1 + \sqrt{33}}{6} \right) \right\}$

Câu 3. (1,5 điểm)

c) Tìm số nguyên n để $A = (n^2 + 3n + 2)^2 + (n + 2)^2$ là số chính phương

Ta có $A = (n + 2)^2 ((n + 1)^2 + 1)$

Xét $n + 2 = 0 \Leftrightarrow n = -2$, ta có $A = 0$ là số chính phương

Xét $n + 2 \neq 0 \Leftrightarrow n \neq -2$, để A là số chính phương khi $(n + 1)^2 + 1 = a^2$ ($a \in \mathbb{Z}$)

Do đó, ta có $(n + 1)^2 - a^2 = -1 \Leftrightarrow (n + 1 - a)(n + 1 + a) = -1$. Ta có các trường hợp :

$$\begin{cases} n + 1 - a = -1 \\ n + 1 + a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow n = -2 (tm); \quad \begin{cases} n + 1 - a = 1 \\ n + 1 + a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow n = -1 (tm)$$

Vậy $n = -2$ hoặc $n = -1$ thì A là số chính phương

d) Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn $|a - b| + |b - c| + |c - d| + |d - a| = a^{2022} + 2023$.

Tìm số dư khi chia a^{12} cho 16

Ta có $|x| + x = 2x$ nếu $x \geq 0$, $|x| + x = 0$ nếu $x < 0$, do đó $|x| + x : 2$ với mọi số nguyên x . Ta có

$$\begin{aligned} & |a - b| + |b - c| + |c - d| + |d - a| \\ &= (|a - b| + a - b) + (|b - c| + b - c) + (|c - d| + c - d) + (|d - a| + d - a); 2 (\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Do đó $|a - b| + |b - c| + |c - d| + |d - a| = a^{2022} + 2023$ chia hết cho 2

Suy ra a^{2022} lẻ, do đó a lẻ, nên a^2 chia 8 dư 1

Suy ra $(a^6 - 1) : 8$ và $(a^6 + 1) : 2$

Vậy $a^{12} = (a^6 - 1)(a^6 + 1) + 1$ chia cho 16 dư 1

Ta có $\angle BPQ = \angle BAQ$ (góc nội tiếp cùng chắn PQ)
 $\angle BAQ = \angle BEK$ (góc nội tiếp cùng chắn BF)
 $\Rightarrow \angle BPQ = \angle BEK \Rightarrow$ tứ giác $BKPE$ nội tiếp
 Do $AEBF$ & $BKPE$ là các tứ giác nội tiếp nên $\angle AFB = \angle BKP$ (cùng bù với $\angle AEB$)
 $\Rightarrow \triangle BKP \sim \triangle BFA$ (dpcm)

e) Gọi I và J lần lượt là giao điểm của AB với OO' và EF . Chứng minh

$$\angle IJE = \angle IFM$$

Do $\angle O'IM = \angle O'FM = \angle O'EM = 90^\circ$ nên các điểm O', I, F, M, E cùng nằm trên đường tròn đường kính $O'M$. Suy ra $\angle IEJ = \angle IMF$ (góc nội tiếp cùng chắn IF)

Và $\angle EIJ = \angle JIF$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung ME và MF bằng nhau)

$\Rightarrow \triangle IJE \sim \triangle IFM$, từ đó suy ra $\angle IJE = \angle IFM$ (đpcm)

f) Chứng minh $PQ = 2\sqrt{OA^2 - OK^2}$

Ta có $\angle BAE = \angle BQP$ (vì tứ giác $ABQP$ nội tiếp) (1)

Và $\angle AEB = \angle BKQ$ (vì tứ giác $BKPE$ nội tiếp), suy ra $\triangle AEB \sim \triangle QKB \Rightarrow \frac{AB}{BQ} = \frac{AE}{QK}$ (2)

Ta có $\angle QBP = \angle QAP = \angle EBF$ và $\angle EBF = \angle EFM$ (góc nội tiếp cùng chắn EF)

Mặt khác, ta có : $\angle EFM = \angle EIM = \angle EIA$ (vì tứ giác $EIFM$ nội tiếp)

Suy ra $\angle QBP = \angle EIA$ (3)

Từ (1) và (3), ta có : $\triangle IAE \sim \triangle BQP \Rightarrow \frac{AI}{BQ} = \frac{AE}{QP} \Leftrightarrow \frac{AB}{2BQ} = \frac{AE}{QP}$ (4)

Từ (2) và (4), ta có $\frac{AE}{2QK} = \frac{AE}{QP} \Rightarrow 2QK = QP \Rightarrow K$ là trung điểm $QP \Rightarrow \triangle OKQ$ vuông tại K

Vậy, ta có $QK^2 = OQ^2 - OK^2 \Leftrightarrow \frac{PQ^2}{4} = OQ^2 - OK^2 \Leftrightarrow PQ = 2\sqrt{OA^2 - OK^2}$ (đpcm)

Câu 5. (1,0 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3abc$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $P = \frac{1}{1+a+2bc} + \frac{1}{1+b+2ac} + \frac{1}{1+c+2ab}$

Áp dụng bất đẳng thức Cossi, ta có $3abc = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \geq 1$

Mặt khác, ta có $a + b + c = 3abc \Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 3$

Áp dụng bất đẳng thức Co – si, ta có:

$$1 + a + 2bc \geq 2\sqrt{a} + 2bc \geq 2\sqrt{2\sqrt{a} \cdot 2bc} = 4\sqrt{\sqrt{a} \cdot bc} \geq 4\sqrt{\sqrt{bc}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a+2bc} \leq \frac{1}{4\sqrt{\sqrt{bc}}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{bc}}} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{bc}} \right) \leq \frac{1}{8} \left[1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{bc} \right) \right] = \frac{1}{16} \left(3 + \frac{1}{bc} \right)$$

Tương tự, ta có :

$$\frac{1}{1+b+2ac} \leq \frac{1}{16} \left(3 + \frac{1}{ac} \right); \frac{1}{1+c+2ab} \leq \frac{1}{16} \left(3 + \frac{1}{ab} \right)$$

Suy ra $P \leq \frac{1}{16} \left(9 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = \frac{3}{4}$; Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

Câu 6. (0,5 điểm) Lớp 9A có 34 học sinh, các học sinh lớp này đều tham gia một số câu lạc bộ của trường. Mỗi học sinh của lớp tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kỳ của lớp này thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng

một câu lạc bộ. Chứng minh rằng có 1 câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh lớp 9A tham gia

Giả sử các câu lạc bộ đều không có quá 8 học sinh của lớp 9A tham gia

Gọi N là số câu lạc bộ có hơn 1 học sinh của lớp 9A

Nếu $N > 4$ thì từ 5 trong số các câu lạc bộ này, ta chọn mỗi câu lạc bộ 2 học sinh của lớp 9A, khi đó 10 học sinh này sẽ không thỏa mãn bài toán

- Nếu $N < 4$ thì tổng số học sinh của lớp 9A tham gia các câu lạc bộ này không quá $3 \cdot 8 = 24$, nghĩa là còn có ít nhất $34 - 24 = 10$ học sinh của lớp 9A, mỗi học sinh tham gia 1 câu lạc bộ mà mỗi câu lạc bộ này chỉ có 1 học sinh của lớp 9A. Chọn 10 học sinh này thì không thỏa mãn điều kiện bài toán
- Nếu $N = 4$ thì số học sinh của lớp 9A tham gia 4 câu lạc bộ này không quá $4 \cdot 8 = 32$, nghĩa là còn có ít nhất 2 học sinh của lớp 9A, mỗi học sinh này tham gia 1 câu lạc bộ mà mỗi câu lạc bộ này chỉ có 1 học sinh lớp 9A. Chọn 2 học sinh trong số những học sinh còn lại này và 4 câu lạc bộ trên mỗi câu lạc bộ chọn 2 học sinh của lớp 9A, khi đó 10 học sinh của lớp 9A được chọn không thỏa mãn điều kiện

Vậy điều giả sử ở trên sai, nghĩa là tồn tại một câu lạc bộ có ít nhất 9 học sinh của lớp 9A tham gia