

I. Ngày thứ nhất

Câu 1. Đa thức $x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có 3 nghiệm thực thoả mãn nghiệm lớn nhất bằng tổng 2 nghiệm còn lại. Chứng minh rằng $c > ab$.

Câu 2. Cho dãy số $(a_n) : a_1 = 88, a_{n+1} = \left| a_n - \frac{1}{88n} \right| \forall n = 1, 2, \dots$

Chứng minh rằng (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3. Cho bảng ô vuông 2022×2022 . Ban đầu, có một ô vuông trong bảng chứa 2022^2 viên sỏi. Chọn một ô vuông có lớn hơn hoặc bằng 2 viên sỏi rồi chuyển cho 2 ô vuông đối xứng qua ô vuông đó và có chung ít nhất 1 đỉnh mỗi ô 1 viên sỏi. Hỏi sau một số hữu hạn bước thực hiện như vậy, ta có thể thu được bảng 2022×2022 mà mỗi ô vuông có chứa 1 viên sỏi được hay không ?

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn (J) tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại E, F và cắt đường tròn (O) tại P, Q . Tiếp tuyến của (J) tại P, Q cắt nhau tại T , AT cắt đường tròn (O) tại K . BE, CF cắt nhau tại X , AX cắt BC tại D . H là chân đường cao hạ từ D xuống EF . Chứng minh rằng

a) $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$

b) KD đi qua điểm chính giữa cung BC chứa A của (O) .

Bài 5: (6,0 điểm) Tồn tại hay không một hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn: Với mọi số thực x, y ta có bất đẳng thức

$$f(x - f(y)) \leq x - y f(x)?$$

Bài 6: (7,0 điểm) Một vùng nọ có 88 thành phố và giữa hai thành phố bất kỳ được kết nối bởi một tuyến bay trực tiếp (hai chiều). Ủy ban Hàng không dự kiến cấp phép cho 88 hãng hàng không khai thác các tuyến bay đó, một tuyến bay bất kỳ sẽ được khai thác bởi đúng một trong các hãng đó và mỗi hãng khai thác ít nhất một tuyến bay. Hơn nữa, người ta muốn rằng với 3 hãng hàng không bất kỳ, luôn tìm được 3 thành phố sao cho 3 tuyến bay trực tiếp kết nối chúng được khai thác bởi 3 hãng đó. Hỏi Ủy ban Hàng không có thể thực hiện được điều đó hay không?

Bài 7: (7,0 điểm) Cho các số nguyên m, n lớn hơn 1 thỏa mãn $m \mid n^3 - 1$ và $n \mid m - 1$. Chứng minh rằng $m = \sqrt{n^3} + 1$ hoặc $m = n^2 + n + 1$.