

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $P = \left[\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right] : \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(1-x)^2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

b) Giải phương trình : $x^2 - 3x + 2 - (x-1)\sqrt{2x-5} = 0$

c) Giải phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 4xy + x - 2 = 0 \\ 4y^2 + x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $\frac{ac}{b+d} \geq 2$. Chứng minh phương trình sau luôn có nghiệm $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình

$$(x+y)(2x+3y)^2 + 2x + y + 2 = 0$$

Câu 3. (1,0 điểm) Với các số thực dương x, y, z thỏa mãn $2(x^2 + y^2 + z^2) = 3y(x+z)$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{2(x+y+z)} - (x^2 + z^2)$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O và có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AH và BC

a) Chứng minh rằng IJ vuông góc với EF và IJ song song với OA

b) Gọi K, Q lần lượt là giao điểm của EF với BC và AD . Chứng minh rằng

$$\frac{QE}{QF} = \frac{KE}{KF}$$

c) Đường thẳng chứa tia phân giác của $\angle FHB$ cắt AB, AC lần lượt tại M, N . Tia phân giác của $\angle CAB$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tại điểm P khác A . Chứng minh ba điểm H, P, J thẳng hàng

Câu 5. (1,0 điểm) Cho tam giác ABC cố định có diện tích S . Đường thẳng d thay đổi đi qua trọng tâm của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N . Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích các tam giác ABN và ACM . Tìm giá trị nhỏ nhất của $S_1 + S_2$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $P = \left[\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right] : \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(1-x)^2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

$$P = \left[\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right] : \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(1-x)^2} = \frac{(-2\sqrt{x})(x-1)^2}{2(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)} = -\sqrt{x}$$

b) Giải phương trình : $x^2 - 3x + 2 - (x-1)\sqrt{2x-5} = 0$

Điều kiện: $x \geq \frac{5}{2}$. Phương trình tương đương

$$(x-1)(x-2-\sqrt{2x-5})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(ktm) \\ x-2=\sqrt{2x-5} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x=3(tm) \end{cases}$$

Vậy $x=3$

c) Giải phương trình $\begin{cases} x^2 + 4xy + x - 2 = 0 \\ 4y^2 + x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$

Cộng hai phương trình đã cho về theo về được

$$(x+2y)^2 + 2(x+2y) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=-3 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $x+2y=1 \Rightarrow x=1-2y$ thay vào phương trình 2 của hệ ta được :

$$4y^2 + 1 - 2y + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \Rightarrow x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

Trường hợp 2: $x+2y=-3 \Rightarrow x=-2y-3$ thay vào pt 2 của hệ ta được :

$$4y^2 - 3 - 2y + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = \frac{-5-\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = \frac{-5+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm

$$(1;0), \left(2; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{-5-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right); \left(\frac{-5+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)$$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $\frac{ac}{b+d} \geq 2$. Chứng minh phương trình sau

luôn có nghiệm $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + b = 0(1) \\ x^2 + cx + d = 0(2) \end{cases}$. Giả sử phương trình này vô nghiệm, khi

đó cả hai phương trình (1), (2) đều vô nghiệm. Tức là :

$$\begin{cases} \Delta(1) > 0 \\ \Delta(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b > a^2 \\ 4d > c^2 \end{cases} \Rightarrow b > 0, d > 0 \Rightarrow b + d > 0$$

Lúc này theo giả thiết thì $\frac{ac}{b+d} \geq 2 \Rightarrow ac \geq 2(b+d)$

Tuy nhiên điều này vô lý do $2(b+d) > \frac{1}{2}(a^2 + c^2) \geq ac$

Vậy điều giả sử sai . Ta có điều phải chứng minh

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình

$$(x+y)(2x+3y)^2 + 2x + y + 2 = 0$$

Đặt $a = x+y$; $b = 2x+3y$ thì từ giả thiết ta được :

$$ab^2 + 4a - b + 2 = 0 \Leftrightarrow a(b^2 + 4) = b - 2 \Leftrightarrow a = \frac{b-2}{b^2+4}$$

$$\text{Do } x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{b-2}{b^2+4} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Với } b = 2 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+3y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \text{ (thử lại đúng)}$$

$$\text{Với } b \neq 2 \Rightarrow |b-2| \geq b^2+4 \Rightarrow \begin{cases} b-2 \geq b^2+4 \\ 2-b \geq b^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-b+6 \leq 0 \\ b^2+b+2 \leq 0 \end{cases} \text{ (vô lý)}$$

$$\text{Vậy } (x; y) = (-2; 2)$$

Câu 3. (1,0 điểm) Với các số thực dương x, y, z thỏa mãn $2(x^2 + y^2 + z^2) = 3y(x+z)$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{2(x+y+z)} - (x^2 + z^2)$

Ta có :

$$3y(x+z) = 2y^2 + 2(x^2 + z^2) \geq 2y^2 + (x+z)^2 \Rightarrow \left(\frac{x+z}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{x+z}{y}\right) + 2 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq \frac{x+z}{y} \leq 2$$

Do đó :

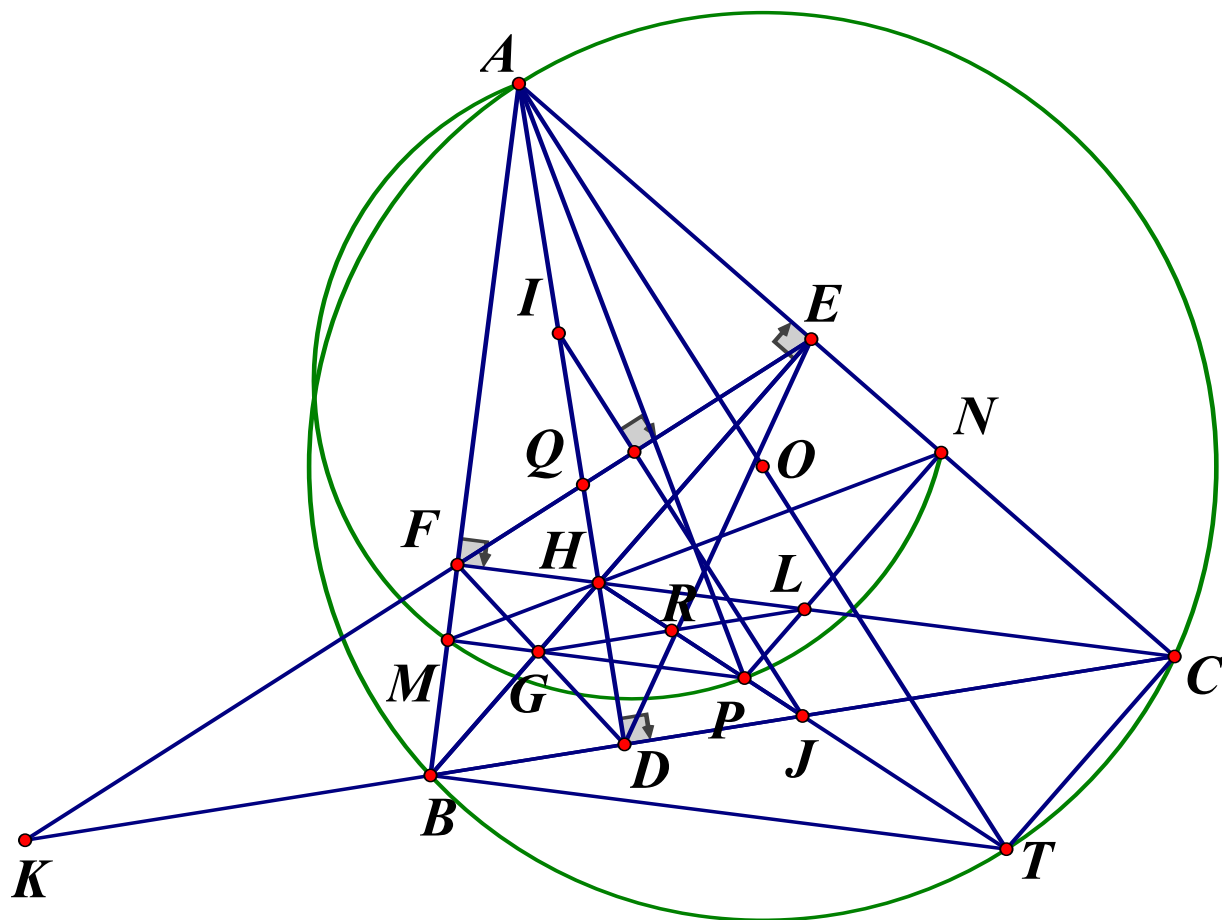
$$P \leq \sqrt{4(x+z)} - x^2 - z^2 = 2\sqrt{x+z} - x^2 - z^2 \leq x+z+1 - x^2 - z^2$$

$$= \frac{3}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } \text{Max } P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = z = \frac{1}{2}; y = 1$$

Câu 4.(3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O và có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AH và BC



a) Chứng minh rằng IJ vuông góc với EF và IJ song song với OA

$$JE = JF = \frac{1}{2} BC; IE = IF = \frac{1}{2} AH \Rightarrow IJ \text{ là đường trung trực của } EF \Rightarrow IJ \perp EF$$

Kẻ đường kính AT của $(O) \Rightarrow BHCT$ là hình bình hành $\Rightarrow I$ là trung điểm của HT
 $\Rightarrow IJ \parallel AT$

b) Gọi K, Q lần lượt là giao điểm của EF với BC và AD . Chứng minh rằng

$$\frac{QE}{QF} = \frac{KE}{KF}$$

Các tứ giác $BDHF, CDHE, BCEF$ là các tứ giác nội tiếp nên ta có :

$$\angle EDH = \angle HCE = \angle HBF = \angle HDF \text{ và do } HD \perp HK$$

$\Rightarrow DQ, DK$ là phân giác trong và phân giác ngoài của $\triangle DEF$

$$\text{Theo tính chất đường phân giác thì } \frac{QE}{QF} = \frac{KE}{KF} \left(= \frac{DE}{DF} \right)$$

c) Đường thẳng chứa tia phân giác của $\angle FHB$ cắt AB, AC lần lượt tại M, N .

Tia phân giác của $\angle CAB$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tại điểm P khác A . Chứng minh ba điểm H, P, J thẳng hàng

Ta có $\angle AMH = \angle MBH + \angle MHB = \angle NCH + \angle NHC = \angle HNA \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A
 $\Rightarrow AP$ là đường kính của $(AMN) \Rightarrow PM \parallel HC, PN \parallel HB$

Gọi G là giao điểm của PM, HB và L là giao điểm của PN, HC

Khi đó tứ giác $HGPL$ là hình bình hành nên HP đi qua trung điểm R của GL

Áp dụng định lý Talet và tính chất đường phân giác ta được :

$$\frac{GH}{GB} = \frac{MF}{MB} = \frac{HF}{HB}; \frac{LH}{LC} = \frac{NE}{NC} = \frac{HE}{HC}$$

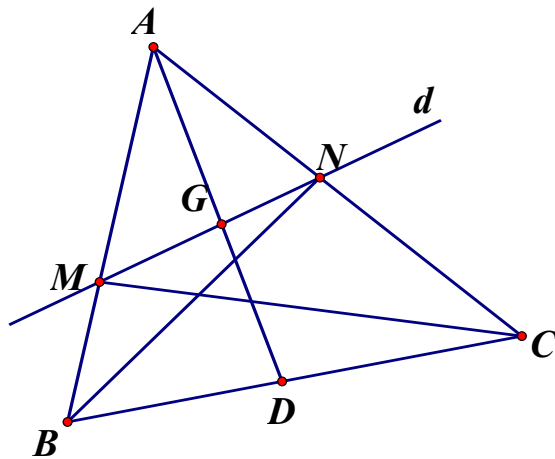
$$\text{Mặt khác } \Delta HFB \sim \Delta HEC \Rightarrow \frac{HF}{HB} = \frac{HE}{HC} \Rightarrow \frac{GH}{GB} = \frac{LH}{LC} \Rightarrow GL \parallel BC$$

Giả sử HR cắt BC tại J'

$$\text{Áp dụng định lý Talet ta có : } \frac{RG}{J'B} = \frac{AR}{AJ'} = \frac{RL}{J'C} \Rightarrow J'B = J'C \Rightarrow J' \equiv J$$

Vậy ba điểm H, P, J thẳng hàng

Câu 5. (1,0 điểm) Cho tam giác ABC cố định có diện tích S . Đường thẳng d thay đổi đi qua trọng tâm của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N . Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích các tam giác ABN và ACM . Tìm giá trị nhỏ nhất của $S_1 + S_2$



Gọi D là trung điểm BC và G là trọng tâm ΔABC

$$\text{Ta có : } \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{S_{AMN}}{S} = \frac{S_{AMG} + S_{ANG}}{S} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{AMG}}{S_{ABD}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{ANG}}{S_{ACD}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AG}{AD} + \frac{1}{2} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AG}{AD} = \frac{1}{3} \left(\frac{AM}{AB} + \frac{AN}{AC} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3. \text{ Mà } \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{S_{ABN} + S_{ACM}}{S_{ABC}} = \frac{AN}{AC} + \frac{AM}{AB}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \frac{S_1 + S_2}{S} = \left(\frac{AN}{AC} + \frac{AM}{AB} \right) \left(\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} \right) \geq 4 \Rightarrow S_1 + S_2 \geq \frac{4}{3} S$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow d \parallel BC$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S_1 + S_2$ là $\frac{4}{3}S$, đạt được khi và chỉ khi $d // BC$