

UBND TỈNH THÁI NGUYÊN
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

KỶ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG
QUỐC GIA LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2022 - 2023
Môn: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (5,0 điểm) Gọi $\mathcal{T}$ là tập tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x + mf(y)) - x = f(2023f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (m \text{ là tham số thực}).$$

Chứng minh rằng $\mathcal{T}$ khác rỗng khi và chỉ khi $m = 2023$.

Câu 2. (5,0 điểm) Cho x, y là các số nguyên dương lớn hơn 2 và $A = y \left(4y + \frac{5}{x} \right) - \frac{1}{y} + x$. Biết rằng A là một số nguyên dương. Chứng minh rằng A là số chính phương.

Câu 3. (3,0 điểm) Cho a, b, c, n là các số nguyên dương và a, b, c không vượt quá n . Giả sử phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{n}$. Chứng minh rằng n có ít nhất hai ước số là số nguyên tố.

Câu 4. (5,0 điểm) Cho tam giác nhọn không cân ABC , (I) là đường tròn nội tiếp. Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB . Gọi A', B', C' lần lượt là điểm đối xứng của A, B, C qua EF, FD, DE . K là trực tâm của tam giác DEF .

a) Chứng minh rằng các tam giác $DEF, A'B'C'$ có diện tích bằng nhau.

b) Giả sử ba đường thẳng DA', EB', FC' đôi một cắt nhau tạo thành tam giác XYZ . Chứng minh rằng trực tâm của tam giác XYZ là trung điểm của KI .

Câu 5. (2,0 điểm) Cho dãy số nguyên dương (u_n) thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

(1) $u_n < u_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$.

(2) $u_a - u_b > u_c - u_d$ với a, b, c, d là các số nguyên dương thoả mãn $1 \leq a < b \leq c < d$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của u_{2023} .

—————Hết—————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

I. Hướng dẫn chung

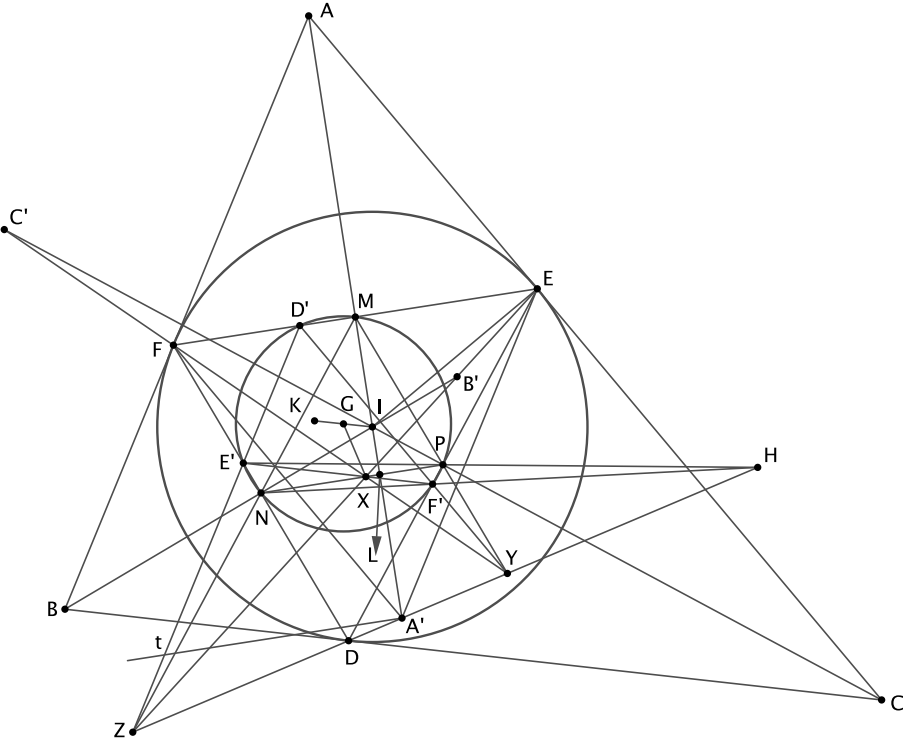
1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu	Nội dung	Điểm
1 (5,0 điểm)	Trước tiên, ta chỉ ra rằng nếu $f \in \mathcal{T}$, thì f là toàn ánh. Thật vậy, giả sử $f \in \mathcal{T}$. Khi đó $f(x + mf(y)) = x + f(2023f(y))$ với mọi số $x, y \in \mathbb{R}$. (1) Thay $y = 0$, ta được $f(x + mf(0)) = x + f(2023f(0))$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Với mọi $k \in \mathbb{R}$, đặt $x = k - f(2023f(0))$ và $h = k - f(2023f(0)) + mf(0)$. Khi đó $f(h) = k$. Vậy f là toàn ánh.	2,5
	Nếu $m = 2023$ thì chọn $f(x) = x$, ta có $f \in \mathcal{T}$. Đảo lại, giả sử $\mathcal{T} \neq \emptyset$. Lấy $f \in \mathcal{T}$, thì f là toàn ánh. Khi đó, tồn tại m để $f(m) = 0$. Thay $y = m$, ta được $f(x) = x + f(0) \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}.$ Từ đó $f(x) = x + c$, với c là hằng số. Thay vào (1), ta được $x + m(y + c) + c = x + 2023(y + c) + c \Leftrightarrow (m - 2023)y = (2023 - m)c$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Do đó $m = 2023$.	2,5
2 (5,0 điểm)	Ta có: $A = 4y^2 + x + \frac{5y^2 - x}{xy}$. Vì A là một số nguyên dương nên $5y^2 - x \vdots xy$ (1). Suy ra $5y^2 - x \vdots y$. Vậy $x \vdots y$. Do đó $xy \vdots y^2$. Kết hợp với (1), ta có: $5y^2 - x \vdots y^2$. Vậy $x \vdots y^2$. Đặt $x = k \cdot y^2$ với k là số nguyên dương.	2,5
	Thay vào (1), ta có: $(5 - k) \cdot y^2 \vdots ky^3$. Ta suy ra $5 - k \vdots ky$ (2). Do đó $5 \vdots k$. Suy ra $k = 1$ hoặc $k = 5$. ◦ Nếu $k = 1$ thì $x = y^2$. Khi đó $A = 5y^2 + \frac{4}{y}$. Ta có: $4 \vdots y$. Chú ý rằng $y > 2$, ta suy ra $y = 4$. Khi đó $A = 81$. ◦ Nếu $k = 5$ thì $x = 5y^2$. Khi đó $A = (3y)^2$. Vậy A là một số chính phương.	2,5

Câu	Nội dung	Điểm
3 (3,0 điểm)	Để thấy $n \neq 1$. Vì $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2, nên $b^2-4ac > 0$. Mặt khác, a, b, c là các số nguyên, ta suy ra $b^2-4ac \geq 1$ Ta có: $\frac{1}{a} \leq \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} = x_1-x_2 \leq \frac{1}{n}$. Do đó $a \geq n$. Theo đề bài, $a \leq n$, ta suy ra $a = n$.	1,0
	Ta có: $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{n} \leq \frac{1}{n}$. Suy ra $b^2-4ac \leq 1$. Vậy $b^2-4ac = 1$. Để thấy b là số lẻ và $b > 1$. Đặt $b = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Ta có: $(2k+1)^2 - 4nc = 1$. Suy ra $k(k+1) = nc$. Giả sử n chỉ có một ước số là số nguyên tố. Khi đó $n = p^s$ với p là số nguyên tố và s là số nguyên dương. Ta có $k(k+1) : p^s$. Vì $(k, k+1) = 1$ nên $k : p^s$ hoặc $k+1 : p^s$. Do đó $p^s \leq k+1$. Suy ra $n = p^s \leq k+1 < 2k+1 = b$ (Mâu thuẫn với giả thiết). Vậy n có ít nhất hai ước số là số nguyên tố.	2,0
4 (5,0 điểm)	Ký hiệu S, p, R theo thứ tự là diện tích, nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. a) Ta có: $\angle IEA' = \angle AIE - \angle IA'E = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle A}{2} = 90^\circ - \angle A$. Suy ra $\frac{IA'}{IA} = \frac{\sin \angle IEA'}{\sin \angle IEA} = \frac{\sin(90^\circ - \angle A)}{\sin 90^\circ} = \cos A$. Tương tự, $\frac{IB'}{IB} = \cos B$. Ta có: $\frac{S_{A'IB'}}{S_{AIB}} = \frac{IA'}{IA} \cdot \frac{IB'}{IB} = \cos A \cdot \cos B$. (1) Vì $S_{AIB} = \frac{rc}{2}$ và $S_{DEF} = \frac{pr^2}{2R}$ (kết quả quen thuộc), nên $\frac{S_{AIB}}{S_{DEF}} = \frac{Rc}{S} = \frac{4R^2}{ab} = \frac{1}{\sin A \cdot \sin B}$. (2) Từ (1) và (2), ta có: $\frac{S_{A'IB'}}{S_{DEF}} = \cot A \cdot \cot B$. Tương tự, $\frac{S_{B'IC'}}{S_{DEF}} = \cot B \cdot \cot C$, $\frac{S_{C'IA'}}{S_{DEF}} = \cot C \cdot \cot A$. Để ý rằng $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$, suy ra $\frac{S_{A'IB'} + S_{B'IC'} + S_{C'IA'}}{S_{DEF}} = 1$. Vậy $S_{A'B'C'} = S_{DEF}$. b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của EF, FD, DE. D', E', F' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của D, E, F trên EF, FD, DE. Gọi G là trung điểm của IK. Ta định nghĩa lại các điểm X, Y, Z như sau: X là giao điểm của NP và $E'F'$; Y là giao điểm của MP và $D'F'$; Z là giao điểm của MN và $D'E'$. Ta chứng minh X, Y, Z chính là ba đỉnh của tam giác tạo bởi các đường DA', EB', FC'. Qua điểm A', kẻ đường thẳng t song song với EF. Gọi L là giao điểm của MA' và NP.	2,5

Câu	Nội dung	Điểm
	Dễ thấy $D'(ZYDM) = D'(E'F'DF) = -1$ và $M(ZYDD') = M(NPDE) = -1$. Suy ra Z, D, Y thẳng hàng (3). Vì $D'Y \parallel A'F, D'Z \parallel A'E, D'M \parallel t$, nên $(D'Y, D'Z, D'A', D'M) = (A'F, A'E, A'D', t)$. Suy ra $\frac{D'(YZA'M)}{\frac{D'F}{D'E}} = (FED') = \frac{\overline{LP}}{\overline{LN}}$. Ta có $M(YZA'D') = M(PNLD') = (PNL) = \frac{\overline{LP}}{\overline{LN}}$.  Để ý rằng các tam giác MNP, DEF đồng dạng, suy ra $\frac{\overline{LP}}{\overline{LN}} = \frac{\overline{D'F}}{\overline{D'E}}$. Do đó $D'(YZA'M) = M(YZA'D')$. Điều đó có nghĩa Y, Z, A' thẳng hàng (4). Từ (3) và (4), ta suy ra $DA' \equiv YZ$. Tương tự, $EB' \equiv ZX, FC' \equiv XY$. Vậy X, Y, Z chính là ba đỉnh của tam giác tạo bởi các đường DA', EB', FC'. Gọi H là giao điểm của $E'P$ và NF'. Áp dụng định lí Pascal cho bộ điểm $(\frac{ME'F'}{D'NP})$, ta có: H, Y, Z thẳng hàng. Áp dụng định lí Brocard cho tứ giác $NE'PF'$, ta có: $GX \perp HD$. Do đó $GX \perp YZ$. Tương tự, $GY \perp XZ$. Vậy G là trực tâm của tam giác XYZ.	2,5
5 (2,0 điểm)	Chọn $a = 1, b = c = k, d = k + 1$ với $k \geq 2$. Ta có: $1 < k = k < k + 1$ với mọi $k \geq 2$. Theo đề bài $u_1 - u_k > u_k - u_{k+1}$. Suy ra $u_{k+1} + u_1 \geq u_k + u_k + 1 = 2u_k + 1$ với mọi $k \geq 2$. Do đó $u_{k+1} - u_1 \geq 2(u_k - u_1) + 1$ với mọi $k \geq 2$. (1) Ta chứng minh $u_n - u_1 \geq 2^{n-1} - 1$ (2) với mọi $n \geq 2$ bằng quy nạp. ○ Với $n = 2$, ta có: $u_2 - u_1 \geq 1 = 2^{2-1} - 1$. Vậy (2) đúng với $n = 2$. ○ Giả sử (2) đúng với $n = k$, tức là $u_k - u_1 \geq 2^{k-1} - 1$ với $k \geq 2$.	1,0

Câu	Nội dung	Điểm
	◦ Ta chứng minh (2) đúng với $n = k+1$. Theo giả thiết quy nạp, $u_k - u_1 \geq 2^{k-1} - 1$, chú ý tới (1), ta có: $u_{k+1} - u_1 \geq 2(2^{k-1} - 1) + 1 = 2^k - 1.$ Do đó (2) đúng với $n = k+1$. Vậy (2) đúng với mọi $n \geq 2$. Suy ra $u_{2023} \geq 2^{2022} + u_1 - 1 \geq 2^{2022}$.	
	Tiếp theo, ta chỉ ra một dãy số (u_n) thoả mãn điều kiện đề bài và có $u_{2023} = 2^{2022}$. Gọi (u_n) là dãy số có $u_n = 2^{n-1}$ với mọi $n \geq 1$. • Rõ ràng $u_n < u_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$. (3) • Với a, b, c, d là các số nguyên dương thoả mãn $1 \leq a < b \leq c < d$. (4) Ta có: $u_a - u_b - u_c + u_d = 2^{a-1} - 2^{b-1} - 2^{c-1} + 2^{d-1} = 2^{a-1} \cdot (1 - 2^{b-a} - 2^{c-a} + 2^{d-a})$. Vì $2^{b-a} + 2^{c-a} \leq 2^{c-a} + 2^{c-a} = 2^{c-a+1} \leq 2^{d-a} < 2^{d-a} + 1$, nên $1 - 2^{b-a} - 2^{c-a} + 2^{d-a} > 0$. Do đó $u_a - u_b - u_c + u_d > 0$ với mọi a, b, c, d là các số nguyên dương thoả mãn $1 \leq a < b \leq c < d$. Từ (3) và (4), ta có dãy số (u_n) thoả mãn các điều kiện của đề bài và có $u_{2023} = 2^{2022}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của u_{2023} bằng 2^{2022}.	1,0