

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN BÌNH THUẬN NĂM 2023-2024

I. Đề bài

Bài 1: (2,0 điểm): Giải phương trình:

$$9x^2 - 53x = \sqrt{2x+1} - 71$$

Bài 2: (2,0 điểm):

a) Kí hiệu $S(n)$ là tổng các chữ số của số nguyên dương n . Biết a và b là hai số nguyên dương thỏa $S(a) = S(b) = S(a+b)$. Chứng minh rằng a và b chia hết cho 9.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + (x+1)^2 = y^4 + (y+1)^4$

Bài 3: (2,0 điểm): Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$

Chứng minh rằng: $\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ca} + \frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{3}{2}$

Bài 4: (3,0 điểm):

Cho tam giác đều ABC có đường cao AH . Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không trùng B, H, C). Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC .

a) Chứng minh $MP + MQ = AH$

b) Gọi K là trung điểm của AM . Chứng minh rằng $KH \perp PQ$

c) Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABM . Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (O) với các cạnh BM, AB, AM . Vẽ DN vuông góc với EF tại N . Chứng minh $\widehat{BNE} = \widehat{MNF}$

Bài 5: (1,0 điểm): Chia bảng hình vuông có cạnh 23cm thành các ô vuông có cạnh bằng 1cm. Ban đầu, tất cả các ô vuông được điền bởi dấu "+". Sau đó người ta thực hiện đổi dấu (mỗi lần đổi dấu là chuyển "+" thành "-", "-" thành "+") trong các ô vuông ở các dòng và các cột của bảng theo quy tắc sau:

- Tất cả các ô của dòng thứ i được đổi dấu i lần ($i \in N, 1 \leq i \leq 23$)
- Tất cả các ô ở cột thứ j được đổi dấu $5j + 1$ lần ($j \in N, 1 \leq j \leq 23$)

Hỏi sau khi thực hiện tất cả thao tác đổi dấu, trên bảng còn bao nhiêu dấu "+"?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: (2,0 điểm): Giải phương trình:

$$9x^2 - 53x = \sqrt{2x+1} - 71$$

Giải

$$\text{Điều kiện } 2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

Phương trình viết lại thành:

$$36x^2 - 212x + 284 = 4\sqrt{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow 36x^2 - 212x + 284 + 8x + 5 = 4(2x+1) + 4\sqrt{2x+1} + 1$$

$$\Leftrightarrow 36x^2 - 204x + 289 = 4(2x+1) + 4\sqrt{2x+1} + 1$$

$$\Leftrightarrow (6x-17)^2 = (2\sqrt{2x+1}+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2x+1}+1=6x-17(1) \\ 2\sqrt{2x+1}+1=17-6x(2) \end{cases}$$

Xét (1), ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1}=6x-18 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1}=3(2x+1)-21(1') \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{2x+1} \geq 0$ ta có:

$$\begin{aligned} (1') &\Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 21 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t-3)(3t+7) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t-3=0 \\ 3t+7=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét (2), ta có:

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 6x + 2\sqrt{2x+1} - 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(2x+1) + 2\sqrt{2x+1} - 19 = 0 \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{2x+1} \geq 0$ ta có:

$$(2') \Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 19 = 0$$

Giải phương trình này ta được hai nghiệm $t_1 = \frac{-1+\sqrt{58}}{3}$ (nhân); $t_2 = \frac{-1-\sqrt{58}}{3}$ (loại)

Với $t_1 = \frac{-1+\sqrt{58}}{3}$ ta được:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} &= \frac{-1+\sqrt{58}}{3} \Leftrightarrow 2x+1 = \frac{59-2\sqrt{58}}{9} \Leftrightarrow 2x = \frac{50-2\sqrt{58}}{9} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{25-\sqrt{58}}{9} \text{ (nhân)} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{25-\sqrt{58}}{9}; 4 \right\}$$

Bài 2: (2,0 điểm):

a) *Kí hiệu $S(n)$ là tổng các chữ số của số nguyên dương n . Biết a và b là hai số nguyên dương thỏa $S(a) = S(b) = S(a+b)$ Chứng minh rằng a và b chia hết cho 9.*

b) *Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + (x+1)^2 = y^4 + (y+1)^4$*

Giải

a) Ta áp dụng tính chất $a - S(a) : 9$ với mọi số nguyên dương a (bạn đọc tự chứng minh tính chất này)

$$\text{Vậy } (a + b - S(a)) : 9$$

$$\Rightarrow (a - S(a)) + b : 9 \Rightarrow b : 9$$

Tương tự, ta được $a : 9$. Vậy a, b chia hết cho 9 (đpcm)

b) Phương trình viết lại:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + 1 &= 2y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 \\ \Rightarrow 2x^2 + 2x + 2 &= 2y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 2 \\ \Rightarrow x^2 + x + 1 &= (y^2 + y + 1)^2 \end{aligned}$$

Vậy từ đây ta được $x^2 + x + 1$ là số chính phương hay $4x^2 + 4x + 4 = (2x + 1)^2 + 3$ là số chính phương.

$$\text{Đặt } (2x + 1)^2 + 3 = t^2 \quad (t \in \mathbb{Z}) \quad (**)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (**) &\Leftrightarrow t^2 - (2x + 1)^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow (t - 2x - 1)(t + 2x + 1) = 3 \end{aligned}$$

Xét tất cả các trường hợp sau:

$t - 2x - 1$	1	3	-1	-3
$t + 2x + 1$	3	1	-3	-1
t	2	2	-2	-2
x	0	-1	-1	0

Vậy $x = 0$ và $x = -1$

Với $x = 0$ thay vào (*), ta được:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow (y^2 + y + 1)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y + 1 = 1 \Leftrightarrow y^2 + y = 0 \Leftrightarrow y(y + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -1 \end{cases} \\ y^2 + y + 1 = -1 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \end{aligned}$$

Với $x = -1$ thay vào (*), ta được:

$$(*) \Leftrightarrow (y^2 + y + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có các nghiệm $(x; y) = (0; 0); (0; -1); (-1; 0); (-1; -1)$

Bài 3: (2,0 điểm):

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$

Chứng minh rằng: $\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{3}{2}$

Giải

Biến đổi giá trị thiết ta được: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$

Ta có: $\frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{a}{2a\sqrt{bc}} = \frac{1}{2\sqrt{bc}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{bc}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

Tương tự: $\frac{b}{b^2 + ca} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right); \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

Vậy $\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{4} \cdot 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{2}{4} \cdot 3 = \frac{3}{2}$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 4: (3,0 điểm):

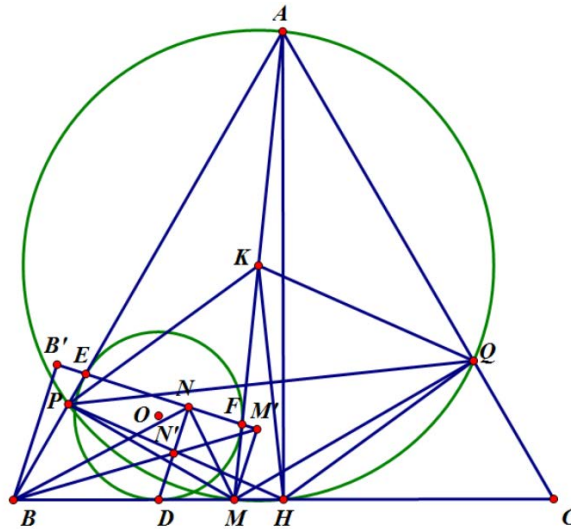
Cho tam giác đều ABC có đường cao AH . Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không trùng B, H, C). Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC .

a) Chứng minh $MP + MQ = AH$

b) Gọi K là trung điểm của AM . Chứng minh rằng $KH \perp PQ$

c) Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABM . Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (O) với các cạnh BM, AB, AM . Vẽ DN vuông góc với EF tại N . Chứng minh $\widehat{BNE} = \widehat{MNF}$

Giải:



a) Trong $\triangle BMP$ vuông ở P , ta có: $MP = MB \cdot \sin MBP = MB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} MB$

Tương tự, ta chứng minh được: $MQ = \frac{\sqrt{3}}{2} MC$

Vậy $MP + MQ = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = AH$

b) Do $\widehat{APM} = \widehat{AQM} = \widehat{AHM} = 90^\circ$ nên A, M, P, Q, H cùng nằm trên đường tròn đường kính AM . Do đó, K là tâm của đường tròn này $\Rightarrow KP = KH = KQ$

Trong $\triangle PKH$ cân ở K có $\widehat{PHK} = \widehat{PAH} = \widehat{BAH} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$. Vậy $\triangle PKH$ đều $\Rightarrow HP = HK$ (1)

Tương tự, là chứng minh được ΔQKH đều $\Rightarrow HQ = HK$ (2)

Từ (1), (2) ta được:

$$\left. \begin{array}{l} HQ = HK \\ \text{Mà } PQ = PK \end{array} \right\} \Rightarrow PQ \text{ là đường trung trực của } HK \Rightarrow PQ \perp HK$$

c) Gọi B' , M' lần lượt là hình chiếu của B , M lên EF . Khi đó do $BB' \parallel DN \parallel MM'$ Gọi N là giao điểm của DN và BM .

Áp dụng định lý Thales trong $\Delta BMM'$; $\Delta M'BB'$ có $BB' \parallel DN \parallel MM'$; $D \in BM$; $N' \in BM'$; $N \in B'M'$, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{MD}{DB} = \frac{M'N'}{N'B} \\ \frac{M'N'}{N'B} = \frac{M'N}{NB'} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{BD}{DM} = \frac{B'N}{NM'} \quad (3)$$

Xét $\Delta BB'E$ và $\Delta MM'F$, ta có:

$$\widehat{BB'E} = \widehat{MM'F} = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \widehat{BEB'} &= \widehat{AEF} = \widehat{AFE} \quad (\Delta AEF \text{ cân tại } F \text{ do } AE = AF \text{ theo tính chất tiếp tuyến}) \\ &= \widehat{MFM'} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \Delta BB'E \sim \Delta MM'F (g.g) \Rightarrow \frac{B'E}{MF} = \frac{BE}{MF} = \frac{BD}{DM} \quad (4) \quad (\text{do } BE = BD; MF = MD)$$

theo tính chất tiếp tuyến)

$$\text{Từ (3) và (4), ta được } \frac{B'M}{NM'} = \frac{B'E}{MF} = \frac{B'N - B'E}{NM' - MF} = \frac{EN}{FN}$$

Xét ΔBNE và ΔMNF , ta có:

$$\widehat{BEN} = \widehat{MFN}$$

$$\frac{EN}{FN} = \frac{B'N}{MN'} = \frac{BE}{MF} \quad (CMT)$$

$$\text{Vậy } \Delta BNE \sim \Delta MNF (c.g.c) \Rightarrow \widehat{BNE} = \widehat{MNF} \quad (\text{ĐPCM})$$

Bài 5: (1,0 điểm):

Chia bảng hình vuông có cạnh 23cm thành các ô vuông có cạnh bằng 1cm. Ban đầu, tất cả các ô vuông được điền bởi dấu "+". Sau đó người ta thực hiện đổi dấu (mỗi lần đổi dấu là chuyển "+" thành "-", "-" thành "+") trong các ô vuông ở các dòng và các cột của bảng theo quy tắc sau:

- Tất cả các ô của dòng thứ i được đổi dấu i lần ($i \in N, 1 \leq i \leq 23$)
- Tất cả các ô ở cột thứ j được đổi dấu $5j + 1$ lần ($j \in N, 1 \leq j \leq 23$)

Hỏi sau khi thực hiện tất cả thao tác đổi dấu, trên bảng còn bao nhiêu dấu "+"?

Giải:

Ta gọi $\hat{o}(i; j)$ là ô ở dòng thứ i và cột thứ j trong bảng. Khi đó, sau tất cả các thao tác đổi dấu, $\hat{o}(i; j)$ bị đổi dấu $i + 5j + 1$ (lần) và $i + 5j + 1 \equiv i + j + 1 \pmod{2}$

Sau tất cả các thao tác đổi dấu, ô $(i; j)$ sẽ mang “ + ” nếu bị đổi dấu một số chẵn lần. Vậy sau khi thao tác, các ô $(i; j)$ mang dấu “ + ” và chỉ khi $i + j + 1 \vdots 2$ hay i, j khác tính chẵn lẻ.

Th 1 : i lẻ, j chẵn.

Ta chọn i thỏa mãn thì có 12 cách, chọn j thỏa thì có 11 cách. Vậy số ô $(i; j)$ thỏa thì là $12 \cdot 11 = 132$ (ô)

Th2: i chẵn, j lẻ.

Bằng cách chọn tương tự, ta được số ô thỏa mãn là $11 \cdot 12 = 132$ (ô)

Vậy số ô mang dấu “ + ” sau khi thực hiện đổi dấu $132 + 132 = 264$ ô