

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THCS NĂM 2021
TỈNH QUẢNG NINH Môn thi: **TOÁN – Bảng A**

Ngày thi: **20/03/2021**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

(Đề thi này có 01 trang)

Câu 1: (3,0 điểm). Cho biểu thức $A = \frac{5\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức A ;
- Tìm giá trị của x để $\frac{A}{2}$ nhận giá trị nguyên.

Câu 2: (5,0 điểm).

- Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2y + xy^2 + 5x + 5y = 32 \end{cases}$$
- Giải phương trình: $x^2 - 5x - 4\sqrt{x+1} + 14 = 0$.

Câu 3: (3,0 điểm). Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn: $x^3 - 9y^2 + 9x - 6y = 1$.

- Chứng minh $\frac{x}{x^2+9}$ là phân số tối giản;
- Tìm tất cả các cặp số (x, y) .

Câu 4: (7,0 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) vẽ tia tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn. Trên tia Ax lấy điểm C bất kì (C khác A), đường thẳng BC cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác B). Gọi H là hình chiếu của A trên OC , đường thẳng DH cắt AB ở E .

- Chứng minh tứ giác $OBDH$ nội tiếp;
- Chứng minh $EA^2 = EO \cdot EB$;
- Tính tỉ số $\frac{HE}{HB}$.

Câu 5: (2,0 điểm). Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x + \frac{1}{y} \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $P = \frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{xy + y^2}$.

..... Hết

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí giám thị 1: Chữ kí giám thị 2:

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – QUẢNG NINH (2020 – 2021)

Câu 1.

a)

$$A = \frac{(5\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1) + (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2) - (2\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{7x - 5\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} = \frac{7\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$$

b)

$$A = 7 - \frac{12}{\sqrt{x}+2}. \text{ Có } \sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{12}{\sqrt{x}+2} \leq 6 \text{ vậy } \frac{1}{2} \leq \frac{A}{2} < \frac{7}{3} \text{ mà}$$

$$\frac{A}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{A}{2} = 1 \text{ hoặc } 2 \text{ hoặc } 3$$

$$*) \frac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{4}{25} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$*) \frac{A}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$*) \frac{A}{2} = 3 \Leftrightarrow x = 100 \text{ (thỏa mãn)}$$

Câu 2.

1)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2y + xy^2 + 5x + 5y = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 10 \\ (x+y)(xy+5) = 32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{(x+y)^2 - 10}{2} \\ (x+y) \left[\frac{(x+y)^2 - 10}{2} + 5 \right] = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{(x+y)^2 - 10}{2} \\ (x+y)^3 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Giải được: $(x, y) = (1; 3)$ hoặc $(x, y) = (3; 1)$.

2) ĐK: $x \geq -1$

$$x^2 - 5x - 4\sqrt{x+1} + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) + (x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4) = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (\sqrt{x+1} - 2)^2 = 0$$

Vì $(x-3)^2 \geq 0$, dấu đẳng thức khi $x = 3$

$$(\sqrt{x+1} - 2)^2 \geq 0, \text{ dấu đẳng thức khi } x = 3$$

$$\text{Vậy: } (x-3)^2 + (\sqrt{x+1} - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn đk).}$$

Câu 3.

$$\text{a) } x^3 - 9y^2 + 9x - 6y = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + 9) = (3y + 1)^2$$

$$\text{Giả sử } UCLN(x; x^2 + 9) = d \Rightarrow \begin{cases} x:d \\ x^2 + 9:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2:d \\ x^2 + 9:d \end{cases} \Rightarrow 9:d$$

$$\Rightarrow d = 1 \text{ hoặc } 3 \text{ hoặc } 9$$

$$\begin{cases} x:d \\ x^2 + 9:d \end{cases} \Rightarrow x(x^2 + 9):d^2 \text{ hay } (3y + 1)^2:d^2 \Rightarrow (3y + 1):d \text{ nhưng } 3y + 1 \text{ không chia}$$

$$\text{hết cho 3, cho 9 nên } d = 1 \Rightarrow \frac{x}{x^2 + 9} \text{ tối giản}$$

b) Ta có $x(x^2 + 9) = (3y + 1)^2$ là số chính phương, $UCLN(x; x^2 + 9) = 1 \Rightarrow x^2 + 9$ là số chính phương.

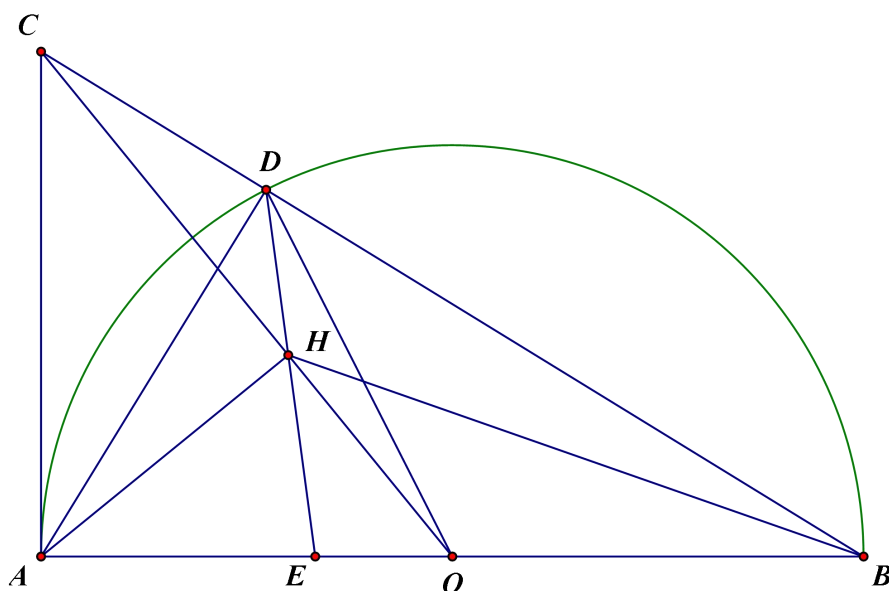
$$\text{Giả sử } x^2 + 9 = k^2 \ (k \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow (k-x)(k+x) = 9 \Rightarrow k-x \text{ và } k+x \text{ là ước của 9}$$

$$\text{Vì } k+x > k-x \Rightarrow \begin{cases} k+x=9 \\ k-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=5 \\ x=4 \end{cases}$$

$$\text{Với } x=4 \Rightarrow y=3. \text{ KL: } (x, y) = (4; 3)$$

Câu 4.



a) Chỉ ra $\widehat{CHA} = \widehat{CDA} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác AHDC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HDB} = \widehat{HAC}$

ΔAOC vuông tại A, $AH \perp OC \Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{HAC}$

$\Rightarrow \widehat{HDB} = \widehat{HOA} \Rightarrow$ Tứ giác BDHO nội tiếp

b) ΔEHO và ΔEBD có: $\widehat{E}$ chung; $\widehat{EOH} = \widehat{EDB} \Rightarrow \Delta EHO \sim \Delta EBD$

$$\Rightarrow \frac{EO}{EH} = \frac{ED}{EB} \Rightarrow EO \cdot EB = EH \cdot ED \quad (1)$$

Tứ giác AHDC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADH} = \widehat{ACH}$

ΔAOC vuông tại A, $AH \perp OC \Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{HAO} \Rightarrow \widehat{EDA} = \widehat{EAH}$

ΔEAH và ΔEDA có $\widehat{E}$ chung, $\widehat{EAH} = \widehat{EDA} \Rightarrow \Delta EAH \sim \Delta EDA$

$$\Rightarrow \frac{EH}{EA} = \frac{EA}{ED} \Rightarrow EA^2 = EH \cdot ED \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow EA^2 = EO \cdot EB$$

c) Tứ giác OBDH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OHB} = \widehat{ODB}$ và $\widehat{DHC} = \widehat{DBO}$

ΔOBD cân tại O $\Rightarrow \widehat{ODB} = \widehat{OBD} \Rightarrow \widehat{OHB} = \widehat{DHC} \Rightarrow \widehat{OHB} = \widehat{OHE}$

$$\Delta HEB \text{ có } HO \text{ là phân giác} \Rightarrow \frac{HE}{HB} = \frac{OE}{OB}$$

$$\text{Có: } EA^2 = EO.EB \Leftrightarrow (R - EO)^2 = EO.(EO + R)$$

$$\Leftrightarrow R^2 - 2REO + EO^2 = EO^2 + REO \Leftrightarrow R^2 = 3REO \Leftrightarrow R = 3.EO \Leftrightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } \frac{HE}{HB} = \frac{1}{3}$$

Câu 5.

$$1 \geq x + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}} \Leftrightarrow \frac{x}{y} \leq \frac{1}{4}$$

$$P = \frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{xy + y^2} = \frac{\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{y} + 2}{\frac{x}{y} + 1}. \text{ Đặt } \frac{x}{y} = t \Rightarrow P = \frac{t^2 - 2t + 2}{t + 1} \text{ với } 0 < t \leq \frac{1}{4}$$

$$P = t - 3 + \frac{5}{t + 1} = (t + 1) + \frac{5}{t + 1} - 4 = \frac{16}{5}(t + 1) + \frac{5}{t + 1} - \frac{11}{5}(t + 1) - 4$$

$$\frac{16(t + 1)}{5} + \frac{5}{t + 1} \geq 2\sqrt{\frac{16(t + 1)}{5} \cdot \frac{5}{t + 1}} = 8, \text{ dấu "=" khi } \frac{16}{5}(t + 1) = \frac{5}{t + 1} \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

$$-\frac{11}{5}(t + 1) \geq -\frac{11}{4}, \text{ dấu "=" khi } t = \frac{1}{4} \Rightarrow P \geq \frac{5}{4}, \text{ dấu "=" khi } (x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } P \text{ là } \frac{5}{4} \text{ tại } (x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$$