

Câu 1. (3,0 điểm)

- 1) Cho m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{n}}{2}$. Tính tổng $m + n$.
- 2) Chứng minh rằng với mọi số dương a và b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{1000}$ ta luôn có $\sqrt{a-1000} + \sqrt{b-1000} = \sqrt{a+b}$.

Câu 2. (5,0 điểm)

- 1) Cho phương trình $\left(m + \sqrt{2x^2 + 4x + 3}\right)\left(x^2 + 2x + m\right)\left(|x+1| - m - 1\right) = 0$, với m là tham số.
- a) Giải phương trình với $m = -1$.
- b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt.
- 2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{9(x-1)y} = y\left(2 + \sqrt{\frac{y}{x-1}}\right) \\ y^2 + xy - 5x + 7 = 0. \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

- 1) Cho đa thức $P(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$ với a, b là các số hữu tỷ và thỏa mãn $P(1 - \sqrt{3}) = 0$.
- Tính giá trị của biểu thức $Q = 18P(3) + 3P(2) + (a - b + 3)^{2022}$.
- 2) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(m; n)$ thỏa mãn $(2m + 5n + 1)(2^m + n + m^2 + m) = 105$.

Câu 4. (7,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), có AH là đường cao. Lấy D là một điểm thuộc miền trong của tam giác AHC sao cho AH đi qua trung điểm của BD . Gọi E, F theo thứ tự là giao điểm của AH với đường thẳng CD và BD . Qua E kẻ đường thẳng tiếp xúc với đường tròn đường kính CD tại điểm M (A và M thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là CD). Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng BD với đường tròn đường kính CD . Chứng minh rằng:

- 1) Tứ giác $ABCN$ nội tiếp một đường tròn và $\widehat{ANB} + \widehat{CAH} = 90^\circ$.
- 2) Tam giác EMD đồng dạng với tam giác ECM và $\frac{MD \cdot AB}{MC} = \sqrt{\frac{ED \cdot BF \cdot BN}{EC}}$.
- 3) Ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Câu 5. (2,0 điểm)

1) Trên một mặt bàn phẳng có 2021 đồng xu kích thước bằng nhau, mỗi đồng xu có hai mặt trong đó có một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ, đồng thời tất cả các đồng xu đều ngửa mặt màu xanh lên trên mặt bàn. Thực hiện trò chơi sau đây: mỗi lượt chơi phải đổi mặt 10 đồng xu nào đó trên mặt bàn. Hỏi sau 2022 lượt chơi có thể nhận được tất cả 2021 đồng xu trên mặt bàn đều ngửa mặt màu đỏ lên trên hay không? Hãy giải thích vì sao?

2) Xét tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c thay đổi và thỏa mãn $c + 2b = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3}{b+c-a} + \frac{5}{a+c-b} + \frac{4}{a+b-c}$.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Họ, tên và chữ ký của GT 1:.....Họ, tên và chữ ký của GT 2:.....