

Câu 1. (4 Điểm)

1. Cho biểu thức $A = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}}$. Chứng minh rằng A là một số nguyên.

2. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + xz = 1$. Hãy tính:

$$B = x \cdot \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}} + y \cdot \sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}} + z \cdot \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}}$$

Câu 2. (4 Điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 1$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 1 \\ y^2 - 3yz + 4z^2 = 2 \\ z^2 + 3xz - x^2 = 3 \end{cases}$$

Câu 3. (6 Điểm)

1. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn: $a + b + c$ chia hết cho 12. Khi đó, chứng minh rằng $P = (a+b)(b+c)(c+a) - 5abc$ cũng chia hết cho 12.

2. Cho một mảnh đất hình vuông, chiều dài mỗi cạnh là 1000 m . Trên mảnh đất đã trồng 4500 cây ăn trái các loại, cây lớn nhất có đường kính $0,5\text{ m}$. Người ta muốn xây dựng các căn nhà nghỉ dưỡng trên mảnh đất này để làm khu du lịch sinh thái. Hãy chứng minh rằng người ta có thể xây dựng được ít nhất 60 căn nhà nghỉ dưỡng trên mảnh đất (với diện tích mỗi căn nhà là 200 m^2) mà không phải chặt đi một cây ăn trái nào đã trồng trên mảnh đất.

3. Cho x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{3x}{y} - \frac{3y}{x} + 4 \geq 0$.

Câu 4. (6 Điểm)

1. Cho tam bìa hình tam giác ABC có trọng tâm G . Gấp tam bìa theo đường EF sao cho đỉnh C trùng với trọng tâm G (E, F lần lượt nằm trên hai cạnh CA, CB). Khi đó, chứng minh rằng: $\frac{AC}{EC} + \frac{BC}{FC} = 6$.

2. Cho đường tròn tâm O đường kính AB (A, B cố định). Lấy hai điểm M, N lần lượt thuộc hai nửa đối nhau của đường tròn (O) sao cho $\angle MAN$ luôn bằng 60° ($M \neq B, N \neq B$). Đường thẳng BN cắt tia AM tại E , đường thẳng BM cắt tia AN tại F .

a) Tính tỉ số $\frac{EF}{AB}$.

b) Khi tam giác AMN đều, gọi C là điểm di động trên cung nhỏ AN ($C \neq A, C \neq N$). Đường thẳng qua M vuông góc với AC cắt đường thẳng NC tại D . Xác định vị trí của điểm C để diện tích tam giác MCD là lớn nhất.

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Câu 1. (4 Điểm)

1. Cho biểu thức $A = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}}$. Chứng minh rằng A là một số nguyên.

Lời giải

$$A = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}}$$

$$\text{Xét } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

Ta có

$$A^3 = \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right)^3 = 1 + \frac{\sqrt{84}}{9} + 1 - \frac{\sqrt{84}}{9} + 3 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right) \cdot \sqrt[3]{\left(1 + \frac{\sqrt{84}}{9}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{84}}{9}\right)}$$

$$A^3 = 2 + 3A \sqrt[3]{\left(1 + \frac{\sqrt{84}}{9}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{84}}{9}\right)} = 2 + 3A \sqrt[3]{1 - \frac{84}{81}} = 2 - A$$

$$A^3 + A - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (A-1)(A^2 + A + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (A-1)\left(\left(A + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow A = 0$$

$$\text{Do } \left(A + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

Vậy A là số nguyên.

2. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + xz = 1$. Hãy tính:

$$B = x \cdot \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}} + y \cdot \sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}} + z \cdot \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}}$$

Lời giải

Ta có $xy + yz + xz = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = x^2 + xy + yz + xz = (x+y)(x+z) \\ y^2 + 1 = y^2 + xy + yz + xz = (y+z)(y+x) \\ z^2 + 1 = z^2 + xy + yz + xz = (z+x)(z+y) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}} = \sqrt{\frac{(y+z)(y+x)(z+x)(z+y)}{(x+y)(x+z)}} = \sqrt{(y+z)^2} = y+z \quad (y, z > 0)$$

$$\text{Tương tự } \sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}} = x+z; \quad \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}} = x+y$$

$$\text{Do đó } B = x \cdot (y+z) + y \cdot (x+z) + z \cdot (y+x) = xy + xz + xy + yz + yz + xz = 2(xy + yz + xz) = 2$$

Vậy $B = 2$.

Câu 2. (4 Điểm)

$$1. \text{ Giải phương trình } \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 1$$

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \sqrt{x-1} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

Lời giải

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} - \sqrt{x-1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} - \sqrt{x-1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-1| - \sqrt{x-1} + 1 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Do } x \geq 2 \text{ nên phương trình } (*) \text{ trở thành } \sqrt{x-1}-1-\sqrt{x-1}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1-\sqrt{x-1}+1=0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 2\}$

$$2. \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 1 & (1) \\ y^2 - 3yz + 4z^2 = 2 & (2) \\ z^2 + 3xz - x^2 = 3 & (3) \end{cases}$$

Lời giải

Cộng từng vế phương trình (1) và (2) ta được $2x^2 - 3xy + 3y^2 - 3yz + 4z^2 = 3$

Kết hợp với phương trình (3) ta được $2x^2 - 3xy + 3y^2 - 3yz + 4z^2 = z^2 + 3yz - x^2$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3xy + 3y^2 - 3yz + 3z^2 - 3yz = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$$

$$\text{Do } (x-y)^2 \geq 0, (y-z)^2 \geq 0, (z-x)^2 \geq 0$$

$$\text{Do đó } x-y = y-z = z-x = 0 \Leftrightarrow x = y = z$$

$$\text{Thay vào phương trình 1 ta được } 2x^2 - 3x^2 + 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Suy ra } x = y = z = \pm 1$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm là } (x; y; z) = (1; 1; 1); (x; y; z) = (-1; -1; -1)$$

Câu 3. (6 Điểm)

1. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn: $a + b + c$ chia hết cho 12. Khi đó, chứng minh rằng $P = (a+b)(b+c)(c+a) - 5abc$ cũng chia hết cho 12.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = (a+b)(b+c)(c+a) - 5abc$$

$$P = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + abc + abc - 5abc$$

$$P = (a^2b + ab^2 + abc) + (b^2c + bc^2 + abc) + (a^2c + ac^2 + abc) - 6abc$$

$$P = (a+b+c)(ab+bc+ca) - 6abc$$

$$\text{Mà } a+b+c \text{ chia hết cho 12 do đó } (a+b+c)(ab+bc+ca) : 12$$

Ta có $a+b+c$ chia hết cho 12 nên trong ba số abc có ít nhất một số chẵn

$$\text{Từ đó suy ra } abc : 2 \Rightarrow 6abc : 12$$

Do đó $(a + b + c)(ab + bc + ca) - 6abc$ chia hết cho 12.

Vậy $P = (a + b)(b + c)(c + a) - 5abc$ chia hết cho 12.

2. Cho một mảnh đất hình vuông, chiều dài mỗi cạnh là 1000 m . Trên mảnh đất đã trồng 4500 cây ăn trái các loại, cây lớn nhất có đường kính $0,5\text{ m}$. Người ta muốn xây dựng các căn nhà nghỉ dưỡng trên mảnh đất này để làm khu du lịch sinh thái. Hãy chứng minh rằng người ta có thể xây dựng được ít nhất 60 căn nhà nghỉ dưỡng trên mảnh đất (với diện tích mỗi căn nhà là 200 m^2) mà không phải chặt đi một cây ăn trái nào đã trồng trên mảnh đất.

Lời giải

Cạnh AB chia 48 đoạn bằng nhau, mỗi đoạn 20 m , hai đoạn kề nhau cách nhau $0,6\text{ m}$, nên hai đoạn tính thừa từ nút A và nút B là $5,9\text{ m}$

Ta có $AB = 1000(\text{m}) = 48 \cdot 20 + 47 \cdot 0,6 + 2 \cdot 5,9(\text{m})$

Xét cạnh AD : chia thành 95 đoạn, mỗi đoạn dài 10 m , 2 đoạn kề cách nhau $0,52\text{ m}$, 2 đoạn từ nút A và D là $0,56\text{ m}$

Ta có $AD = 1000(\text{m}) = 95 \cdot 10 + 94 \cdot 0,52 + 2 \cdot 0,56(\text{m})$

Vậy ta có $48 \cdot 95 = 4560$ mảnh (1 mảnh có diện tích $20 \cdot 10 = 200\text{ m}^2$) mà số cây là 4500 cây

Suy ra có ít nhất 60 mảnh không có cây nào.

3. Cho x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{3x}{y} - \frac{3y}{x} + 4 \geq 0.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad (x, y > 0) \Rightarrow t \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2$$

$$\text{Và } \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = t^2 - 2$$

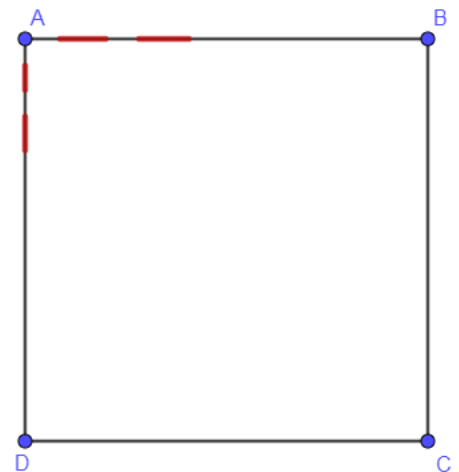
$$\text{Khi đó } \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{3x}{y} - \frac{3y}{x} + 4 \geq 0 \text{ trở thành } t^2 - 2 - 3t + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2)(t - 1) \geq 0$$

Vì $t \geq 2$ nên $(t - 2)(t - 1) \geq 0$ luôn đúng

$$\text{Vậy } \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{3x}{y} - \frac{3y}{x} + 4 \geq 0.$$



Câu 4. (6 Điểm)

1. Cho tấm bìa hình tam giác ABC có trọng tâm G . Gấp tấm bìa theo đường EF sao cho đỉnh C trùng với trọng tâm G (E, F lần lượt nằm trên hai cạnh CA, CB). Khi đó, chứng minh rằng: $\frac{AC}{EC} + \frac{BC}{FC} = 6$.

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh BC, AC .

Gấp tấm bìa theo đường EF sao cho đỉnh C trùng với trọng tâm G . Khi đó tứ giác $GEFC$ là hình bình hành. Do đó $GE \parallel FC, GF \parallel AC$.

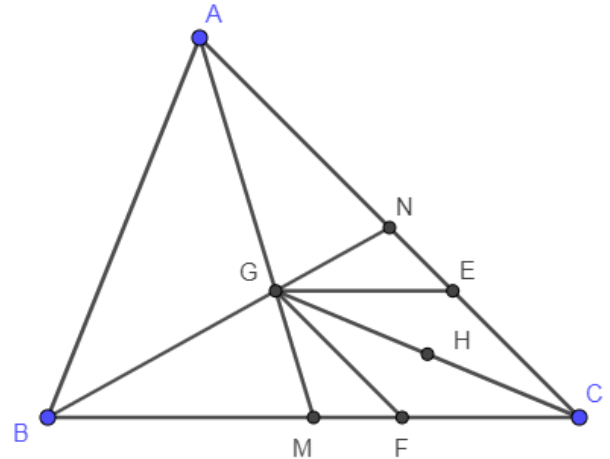
Xét tam giác AMC có $GE \parallel FC$ nên ta có tỉ lệ

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AM}{GM} = 3$$

Xét tam giác BNC có $GF \parallel NC$ nên ta có tỉ lệ

$$\frac{BC}{FC} = \frac{BN}{GN} = 3$$

Khi đó $\frac{AC}{EC} + \frac{BC}{FC} = 3 + 3 = 6$ (đpcm)



2. Cho đường tròn tâm O đường kính AB (A, B cố định). Lấy hai điểm M, N lần lượt thuộc hai nửa đối nhau của đường tròn (O) sao cho $\angle MAN$ luôn bằng 60° ($M \neq B, N \neq A$). Đường thẳng BN cắt tia AM tại E , đường thẳng BM cắt tia AN tại F .

- a) Tính tỉ số $\frac{EF}{AB}$.

Lời giải

$\triangle MAB$ vuông tại M nên $MO = \frac{1}{2}AB = R$ (Tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông)

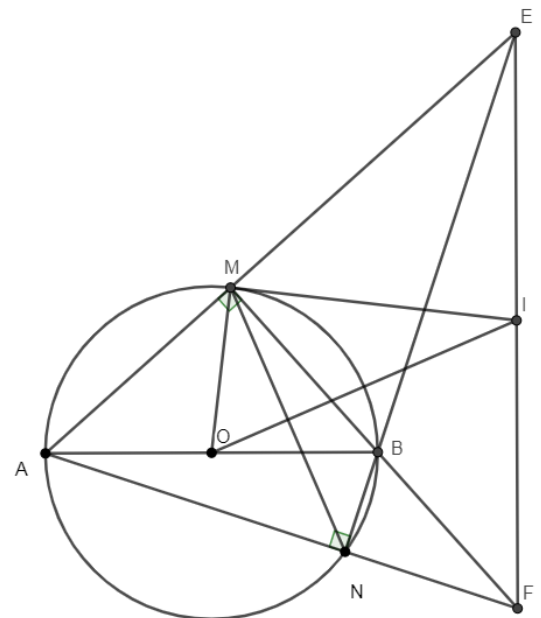
$\triangle MEF$ vuông tại M nên $MI = \frac{1}{2}EF$ (Tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông)

Tự chứng minh $MI \perp OM$

Ta có $\angle MAN = \angle IMN = 60^\circ$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Do đó tam giác OMI vuông tại M nên $MI = MO \cdot \tan 60^\circ = R\sqrt{3}$

$$\text{Vậy } \frac{EF}{AB} = \frac{2MI}{2MO} = \frac{2R\sqrt{3}}{2R} = \sqrt{3}$$



b) Khi tam giác AMN đều, gọi C là điểm di động trên cung nhỏ AN ($C \neq A, C \neq N$). Đường thẳng qua M vuông góc với AC cắt đường thẳng NC tại D . Xác định vị trí của điểm C để diện tích tam giác MCD là lớn nhất.

Lời giải

Kéo dài MO cắt đường tròn tâm (O) tại S khi đó S là điểm chính giữa cung AN .

Gọi R là giao điểm của MD và AC .

Ta có $DCM = 180^\circ - MCN = 180^\circ - MAN = 120^\circ$

Xét $\triangle MRC$ và $\triangle MAS$ có:

$MRC = MAS = 90^\circ$; $MCR = MSA$ (cùng chắn cung MA trong đường tròn (O)).

Khi đó $\triangle MRC \sim \triangle MAS$ ($g - g$)

Suy ra $RMC = AMS = 30^\circ$

Xét tam giác MCD có $RMC = 30^\circ$; $MCD = 120^\circ$

nên $CDM = 30^\circ$

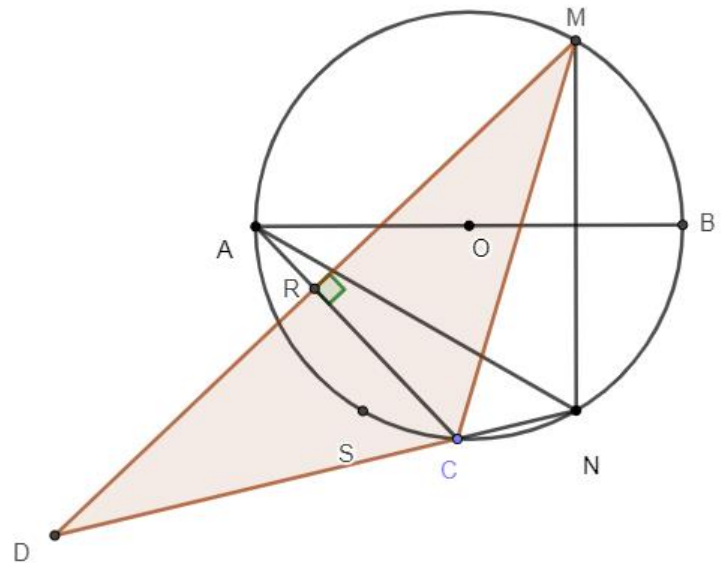
Do đó tam giác MCD là tam giác cân tại C mà $CR \perp MD$ nên R là trung điểm của MD

Ta có $\triangle MRC \sim \triangle MAS$ ($g - g$) nên

$$\frac{S_{MRC}}{S_{MSA}} = \left(\frac{MC}{MS} \right)^2 \leq \left(\frac{MS}{MS} \right)^2 = 1$$

Suy ra $S_{MRC} \leq S_{MSA} = \frac{1}{2} \cdot SA \cdot MA$ hay $\frac{1}{2} MR \cdot RC \leq \frac{1}{2} \cdot SA \cdot MA \Leftrightarrow MR \cdot RC \leq SA \cdot MA$ không đổi

Vậy nên giá trị lớn nhất của tam giác MCD bằng $SA \cdot AM$. Dấu “=” xảy ra khi C là điểm chính giữa cung AN .



-----HẾT-----