

HSG T9 Tỉnh Thái Bình 21 22

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{3 - \sqrt{13 - \sqrt{48}}}}}{\sqrt{3} + 1}$

b) Cho hai số $a; b$ thỏa mãn $(a + \sqrt{a^2 + 1})(3b + \sqrt{9b^2 + 1}) = 1$

Tính giá trị biểu thức $P = a^3 + 27b^3 + 2a + 6b + 2022$.

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = mx + 2m - 1$ (m là tham số).

Tìm m để đường thẳng (d) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B (A, B không trùng điểm O)

sao cho $T = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Cho đa thức $P(x) = 6x^4 - 7x^3 + mx^2 + 3x + 2$ và đa thức $Q(x) = x^2 - x + n$. Tìm m, n để đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $4x^3 + 18x^2 + 28x + 15 = \sqrt[3]{2x + 3}$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 4y - 1 - 2\sqrt{4xy + x - 8y - 2} = 0 \\ \sqrt{x - 2} + 3\sqrt{4y + 1} = 4 \end{cases}$$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn: $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} = 1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab}$.

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có $BC = a$ và đường cao $AH = h$. Từ điểm D bất kì trên đoạn thẳng AH vẽ đường thẳng song song với BC cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại M, N . Vẽ MI, NK cùng vuông góc với đường thẳng BC (I, K thuộc đường thẳng BC). Xác định vị trí điểm D trên đoạn thẳng AH để diện tích tứ giác $MNKI$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6. (3,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , vẽ tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm), MO cắt AB tại H , điểm I là trung điểm MH , vẽ tiếp tuyến IN với đường tròn tâm O (N là tiếp điểm).

Chứng minh rằng: $\frac{1}{NO^2} + \frac{1}{NI^2} = \frac{1}{NH^2} + \frac{1}{MN^2}$.

Câu 6. (2,0 điểm)

Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (9y + 1945)^2.$$

---Hết---

Câu 1. (3,0 điểm)

$$a) A = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{3 - \sqrt{(2\sqrt{2} - 5)^2}}}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1}}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{3} - 1}}{\sqrt{3} + 1}$$

$$A = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b) \text{ Đặt } m = 3b \text{ thì } (a + \sqrt{a^2 + 1})(3b + \sqrt{9b^2 + 1}) = 1 \Leftrightarrow (a + \sqrt{a^2 + 1})(m + \sqrt{m^2 + 1}) = 1 \\ \Leftrightarrow a + \sqrt{a^2 + 1} = \frac{1}{m + \sqrt{m^2 + 1}} \Leftrightarrow a + \sqrt{a^2 + 1} = -m + \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (a + m) + \frac{(a + m)(a - m)}{\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{m^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow (a + m) \left(1 + \frac{a - m}{\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{m^2 + 1}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + m = 0 \\ 1 + \frac{a - m}{\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{m^2 + 1}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -m \\ \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{m^2 + 1} = m - a \end{cases}$$

- Nếu $a = -m$ thì:

$$P = a^3 + 27b^3 + 2a + 6b + 2022 = (-m)^3 + m^3 + 2(-m) + 2m + 2022 = 2022$$

- Nếu $\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{m^2 + 1} = m - a$

$$\text{Nx: } \sqrt{a^2 + 1} > |a|; \sqrt{m^2 + 1} > |m|$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{m^2 + 1} \geq m - a$$

Vậy nếu $(a + \sqrt{a^2 + 1})(3b + \sqrt{9b^2 + 1}) = 1$ thì $P = 2022$.

Câu 2. (3,0 điểm)

$$a) \text{ Đường thẳng (d) cắt trục Ox, Oy tại hai điểm A, B khác } \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2m - 1 \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó đường thẳng (d) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại $A\left(\frac{1 - 2m}{m}; 0\right)$ và $B(0; 2m - 1)$

$$\Rightarrow OA = \left| \frac{1 - 2m}{m} \right|, OB = |2m - 1|$$

$$\text{Ta có: } T = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{m^2}{(2m - 1)^2} + \frac{1}{(2m - 1)^2} > 0$$

$$T = \frac{m^2 + 1}{(2m - 1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{4m^2 - 4m + 1}{m^2 + 1} = 5 - \frac{(m - 2)^2}{m^2 + 1} \leq 5 \text{ (vì } (m - 2)^2 \geq 0, m^2 + 1 > 0 \forall m)$$

$$\Rightarrow T \geq \frac{1}{5} \Rightarrow T_{\min} = \frac{1}{5}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = 2$ (thỏa mãn các đk)

$$\text{Vậy với } m = 2 \text{ thì } T_{\min} = \frac{1}{5}.$$

b) Đặt phép chia:

$6x^4 - 7x^3 + mx^2 + 3x + 2$	$x^2 - x + n$
$- \quad 6x^4 - 6x^3 + 6nx^2$	$6x^2 - x + m - 6n - 1$

$$\begin{array}{r}
-x^3 + (m-6n)x^2 + 3x + 2 \\
- \quad -x^3 \quad + x^2 \quad - \quad nx \\
\hline
(m-6n-1)x^2 + (3+n)x + 2 \\
- \quad (m-6n-1)x^2 + (6n-m+1)x + mn-6n^2-n \\
\hline
(m-5n+2)x + 6n^2 - mn + n + 2
\end{array}$$

Để $P(x) : Q(x) \Leftrightarrow (m-5n+2)x + 6n^2 - mn + n + 2 = 0 \quad \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-5n+2=0 \\ 6n^2-mn+n+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5n-2 \\ 6n^2-(5n-2)n+n+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5n-2 \\ n^2+3n+2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=5n-2 \\ n=-1 \\ n=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-1, m=-7 \\ n=-2, m=-12 \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm là: $\begin{cases} n=-1, m=-7 \\ n=-2, m=-12 \end{cases}$

Câu 3. (4,0 điểm)

$$\begin{aligned}
a) \quad & 4x^3 + 18x^2 + 28x + 15 = \sqrt[3]{2x+3} \Leftrightarrow (2x+3)(2x^2+6x+5) = \sqrt[3]{2x+3} \\
& \Leftrightarrow (2x+3)(4x^2+12x+10) = 2\sqrt[3]{2x+3} \Leftrightarrow (2x+3)[(2x+3)^2+1] = 2\sqrt[3]{2x+3} \\
& \Leftrightarrow t^3(t^6+1) = 2t \quad (\text{với } t = \sqrt[3]{2x+3}) \\
& \Leftrightarrow t(t^8+t^2-2) = 0 \Leftrightarrow t(t^2-1)(t^6+t^4+t^2+1) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t^2-1=0 \end{cases} \quad (\text{vì } t^6+t^4+t^2+1 > 0 \quad \forall t) \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2x+3}=0 \\ \sqrt[3]{2x+3}=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3=0 \\ 2x+3=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ x=-1 \\ x=-2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S = \left\{-1; -2; -\frac{3}{2}\right\}$

$$b) \quad \text{ĐK: } x \geq 2, y \geq -\frac{1}{4}$$

Đặt $a = \sqrt{x-2}, b = \sqrt{4y+1}$ ($a, b \geq 0$), hệ đã cho trở thành:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab = 0 \\ a + 3b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ a + 3b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + 3b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 1 \\ \sqrt{4y+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \quad (\text{tmđk})
\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 0)$.

Câu 4. (2,0 điểm)

Ta có: $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = abc$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương, ta có:

$$a^2 + bc \geq 2a\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{2\sqrt{bc}}$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{b}{b^2 + ca} \leq \frac{1}{2\sqrt{ca}}; \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}$$

$$\text{Suy ra: } P \leq \frac{1}{2\sqrt{bc}} + \frac{1}{2\sqrt{ca}} + \frac{1}{2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2\sqrt{abc}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$(1 \cdot \sqrt{a} + 1 \cdot \sqrt{b} + 1 \cdot \sqrt{c})^2 \leq 3(a + b + c) \text{ hay } \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a + b + c)}$$

$$(1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3abc \Rightarrow a + b + c \leq \sqrt{3abc}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq 3\sqrt{3abc}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2\sqrt{abc}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a^2 + b^2 + c^2 = abc \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

Câu 5. (3,0 điểm)

Đặt $DH = x$ ($0 < x < h$) thì $AD = h - x$

Tứ giác MNIK có $MN \parallel IK$ (gt) và $MN \parallel NK$ (cùng vuông góc với BC) nên là hình bình hành; mà $\widehat{MIK} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác MNIK là hình chữ nhật

Chứng minh tương tự ta có tứ giác MDHI là hình chữ nhật

$$\Rightarrow MI = DH = x.$$

$$\triangle ABC \text{ có } MN \parallel BC \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AD}{AH}$$

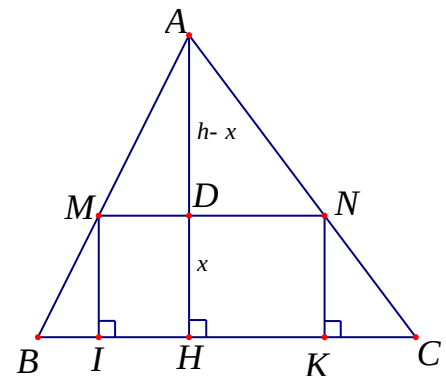
$$\Rightarrow MN = \frac{AD \cdot BC}{AH} = \frac{a(h - x)}{h}$$

$$\text{Ta có: } S = S_{MINK} = MN \cdot MI = \frac{ax(h - x)}{h}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương, ta có:

$$\sqrt{x(h - x)} \leq \frac{x + h - x}{2} = \frac{h}{2} \Rightarrow x(h - x) \leq \frac{h^2}{4} \Rightarrow S = \frac{ax(h - x)}{h} \leq \frac{ah}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{ah}{2}$$



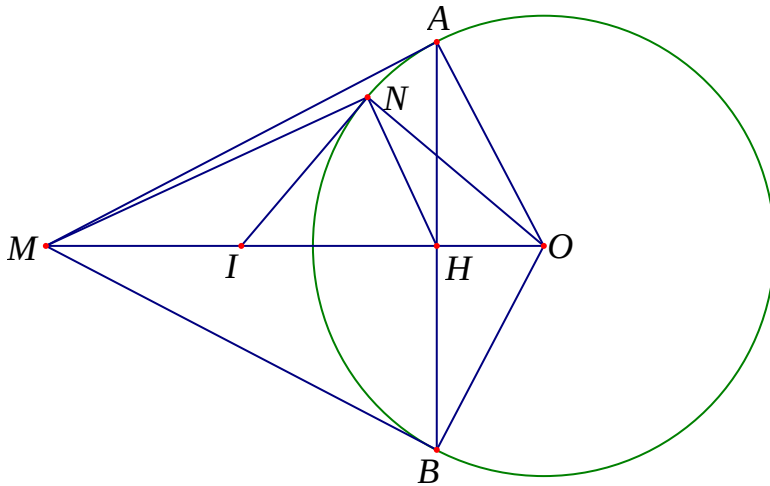
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = h - x \Leftrightarrow x = \frac{h}{2} \Leftrightarrow D$ là trung điểm của BC

Vậy để diện tích tứ giác $MNKI$ đạt giá trị lớn nhất thì D phải là trung điểm của AH .

Câu 6. (3,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , vẽ tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm), MO cắt AB tại H , điểm I là trung điểm của MH , vẽ tiếp tuyến IN với đường tròn tâm O (N là tiếp điểm).

Chứng minh rằng: $\frac{1}{NO^2} + \frac{1}{NI^2} = \frac{1}{NH^2} + \frac{1}{NM^2}$.



Kẻ $NK \perp OM$. Gọi J là giao điểm của ON và AB , P là giao điểm của OJ với NH .

Vì MA, MB là hai tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại M (A, B là hai tiếp điểm)

$\Rightarrow OA \perp AM, MA = MB, OA = OB$

$\Rightarrow OM$ là đường trung trực của $AB \Rightarrow OM \perp AB$ tại $H \Rightarrow AH \perp OM$

ΔOAM vuông tại A có $AH \perp OM$ nên $OA^2 = OH \cdot OM$

$$\Rightarrow ON^2 = OH \cdot OM \text{ (vì } ON = OM = R) \Rightarrow \frac{ON}{OH} = \frac{OM}{ON}$$

Xét ΔOHN và ΔONB có: $\widehat{MON}$ chung; $\frac{ON}{OH} = \frac{OM}{ON}$

$\Rightarrow \Delta OHN \sim \Delta ONB$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{ONH} = \widehat{OMN}$ (1)

Tứ giác $INJO$ có $\widehat{INJ} = 90^\circ$ (vì NI là tiếp tuyến của (O)) và $\widehat{IHJ} = 90^\circ$ (vì $AB \perp OM$)

$\Rightarrow 4$ điểm I, N, J, H cùng thuộc đường tròn đường kính IJ

$\Rightarrow \widehat{JNH} = \widehat{JIH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HJ) hay $\widehat{ONH} = \widehat{OIJ}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{OIJ} = \widehat{OMN}$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $IJ \parallel MN$, hay $IP \parallel MN$

Xét ΔHMN có I là trung điểm của NH (gt), $IP \parallel MN$ (cmt)

$\Rightarrow P$ là trung điểm của NH

Xét đường tròn đường kính IJ có đường kính IJ đi qua trung điểm P của dây NH

$\Rightarrow IJ \perp NH$

Mà $IJ \parallel MN$ (cmt) $\Rightarrow MN \perp NH \Rightarrow \Delta MNH$ vuông tại N.

Vì ΔMNH và ΔONI cùng vuông tại N và cùng có NK là đường cao nên ta có:

$$NK.MH = NM.NH, NK.OI = NI.NO$$

$$MH^2 = NH^2 + NM^2; OI^2 = NO^2 + NI^2$$

$$\Rightarrow \frac{NK.MH}{NK.OI} = \frac{NM.NH}{NI.NO} \text{ hay } \frac{MH}{OI} = \frac{NM.NH}{NI.NO} \Rightarrow \frac{OI}{NI.NO} = \frac{MH}{NM.NH}$$

$$\Rightarrow \frac{OI^2}{NI^2.NO^2} = \frac{MH^2}{NM^2.NH^2} \Rightarrow \frac{NO^2 + NI^2}{NI^2.NO^2} = \frac{NH^2 + NM^2}{NM^2.NH^2}$$

$$\text{Hay } \frac{1}{NO^2} + \frac{1}{NI^2} = \frac{1}{NH^2} + \frac{1}{NM^2} \text{ (đpcm).}$$

Câu 7. (2,0 điểm)

$$\text{Ta có: } x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (9y + 1945)^2 \Leftrightarrow (x + 1)^3 + 1 = [3(3y + 368) + 1]^2$$

Đặt $a = x + 1, b = 3y + 368$, phương trình trên trở thành:

$$a^3 + 1 = (3b + 1)^2 \Leftrightarrow (3b + 1)^2 = (a + 1)(a^2 - a + 1) \quad (1)$$

Vì $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow a, b \in \mathbb{N}, a \geq 1, b \geq 368$

- Nếu $a = 1$ thì (1) trở thành: $(3b + 1)^2 = 2$
Phương trình này vô nghiệm, vì $(3b + 1)^2$ là số chính phương, còn 2 không phải là số chính phương.
- Nếu $a \geq 2$ thì $a + 1 \geq 3, a^2 - a + 1 = a(a - 1) + 1 \geq 3$

Đặt $d = \text{ƯCLN}(a + 1, a^2 - a + 1) (d \geq 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 1 : d \\ a^2 - a + 1 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + a : d \\ a^2 - a + 1 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 1 : d \\ 2a - 1 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a + 1) - (2a - 1) = 3 : d \Rightarrow d \in \{1, 3\}$$

$$\text{Do } (3b + 1)^2 \not\equiv 3 \pmod{3} \text{ nên từ (1) } \Rightarrow d \neq 3 \Rightarrow d = 1$$

Các số nguyên dương $a + 1$ và $a^2 - a + 1$ nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương nên mỗi số đều là số chính phương.

Nhưng $(a - 1)^2 < a^2 - a + 1 < a^2$ (do $a \geq 2$) nên $a^2 - a + 1$ không thể là số chính phương.

Như vậy không tồn tại cặp số tự nhiên (x, y) thỏa mãn điều kiện đề bài.

