

ĐÁP ÁN, HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM (ĐỀ XUẤT)
Môn: TOÁN

BÀI	ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM	BIỂU ĐIỂM
Bài 1 (3,0 điểm)	Bài 1: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_0 = 2022$ và $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} - 1, \forall n \geq 0$. Chứng minh rằng dãy số (a_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.	
	Chứng minh dãy (a_n) giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên dãy (a_n) có giới hạn.	1,5
	Giả sử $\lim a_n = a \Rightarrow a = a + \frac{1}{a} - 1 \Rightarrow a = 1$. Vậy $\lim a_n = 0$.	1,5
Bài 2 (3,0 điểm)	Bài 2: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $3(ab + bc + ca) \leq 7 + 2abc$.	
	Điều cần chứng minh tương đương với $3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc \geq 13$. Đặt $f(a, b, c) = 3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc - 13; t = \frac{b+c}{2}$.	0,5
	*Trước hết ta chứng minh $f(a, b, c) \geq f(a, t, t)$. Thật vậy, do vai trò của a, b, c như nhau nên ta có thể giả thiết $a \leq b \leq c$ $\Rightarrow 3a \leq a + b + c = 3$ hay $a \leq 1$. $f(a, b, c) - f(a, t, t)$ $= 3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc - 13 - 3(a^2 + t^2 + t^2) - 4at^2 + 13$ $= 3(b^2 + c^2 - 2t^2) + 4a(bc - t^2)$	1,0
	$= 3 \left[b^2 + c^2 - \frac{2(b+c)^2}{4} \right] + 4a \left[bc - \frac{(b+c)^2}{4} \right]$ $= \frac{3(b-c)^2}{2} - a(b-c)^2 = \frac{(3-2a)(b-c)^2}{2} \geq 0$ (do $a \leq 1$)	0,5
	*Bây giờ ta chỉ cần chứng minh $f(a, t, t) \geq 0$ với $a + 2t = 3$. Ta có $f(a, t, t) = 3(a^2 + t^2 + t^2) + 4at^2 - 13$ $= 3((3-2t)^2 + t^2 + t^2) + 4(3-2t)t^2 - 13$ $= 2(t-1)^2(7-4t) \geq 0$ (do $2t = b+c < 3$).	1,0

BÀI	ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM	BIỂU ĐIỂM
Bài 3 (3,0 điểm)	Bài 3: Tìm tất cả các bộ ba số thực đôi một phân biệt $(x; y; z)$ thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = -\frac{1}{2}x + y + 4z \\ x^2 + y^2 = -x + 2y + 2z \\ y^2 = \frac{1}{2}x + z \end{cases}.$	
	Đặt $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = -\frac{1}{2}x + y + 4z & (1) \\ x^2 + y^2 = -x + 2y + 2z & (2) \\ y^2 = \frac{1}{2}x + z & (3) \end{cases}$ Phương trình (1) trừ phương trình (3) về theo vế, ta được $z^2 + x^2 = -x + y + 3z \quad (4)$	0,5
	Phương trình (2) trừ phương trình (4) về theo vế, ta được $y^2 - z^2 = y - z \Leftrightarrow (y - z)(y + z - 1) = 0$ Do $y \neq z$ nên $y + z - 1 = 0 \quad (5)$. Phương trình (3) trừ phương trình (4) về theo vế, ta được $y^2 - x^2 = 2x - 2y \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 2) = 0.$ Do $x \neq y$ nên ta có $x + y + 2 = 0 \quad (6)$.	0,5
	Từ (5) và (6) ta suy ra $\begin{cases} x = -y - 2 \\ z = -y + 1 \end{cases}$, thay vào phương trình (2) ta được $(y + 2)^2 + y^2 = y + 2 + 2y + 2(-y + 1) \Leftrightarrow 2y^2 + 3y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}.$	0,5
	Với $y = 0$, ta được $(x, y, z) = (-2, 0, 1)$.	0,5
	Với $y = -\frac{3}{2}$, ta được $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.	0,5
	Thử lại ta thấy các bộ số trên thỏa mãn hệ phương trình. Do đó tất cả các bộ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x, y, z) = (-2, 0, 1), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right).$	0,5
Bài 4 (3,0 điểm)	Bài 4: Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $f(f(x) + f(y)) = 4x + 4y + 5, \text{ với mọi số nguyên dương } x, y.$	

BÀI	ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM	BIỂU ĐIỂM
	* Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa yêu cầu bài ra. *Thay $x = y$ vào đẳng thức trên ta được $f(2f(x)) = 8y + 5$. Xét $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(2f(x_1)) = f(2f(x_2))$ $\Rightarrow 8x_1 + 5 = 8x_2 + 5 \Rightarrow x_1 = x_2$. Do đó f đơn ánh.	0,5
	Ta có $f(f(x-1) + f(x+1)) = 8x + 5 = f(f(x) + f(x))$. Mà f đơn ánh nên $f(x-1) + f(x+1) = 2f(x)$ $\Rightarrow f(x+1) - f(x) = f(x) - f(x-1), \quad \forall x \geq 2.$	0,5
	Từ đó $f(x) - f(x-1) = f(x-1) - f(x-2) = \dots = f(2) - f(1) = a$ suy ra $f(x) = a + f(x-1) = a + a + f(x-2)$ $= 2a + f(x-2) = 2a + a + f(x-3)$ $= 3a + f(x-3) = \dots =$ $= f(1) + (x-1)a = ax + b, \text{ trong đó } b = f(1) - a.$	0,5
	Thay $f(x) = ax + b$ vào phương trình điều kiện ở giả thiết, ta được $f(ax + b + ay + b) = 4x + 4y + 5$ $\Leftrightarrow f(a(x+y) + 2b) = 4x + 4y + 5$ $\Leftrightarrow a[a(x+y) + 2b] + b = 4x + 4y + 5$ $\Leftrightarrow a^2(x+y) + 2ab + b = 4x + 4y + 5$	0,5
	Đồng nhất hệ thức ta được: $\begin{cases} a^2 = 4 \\ 2ab + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a = -2 \\ b = -5/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2x + 1 \\ f(x) = -2x - 5/3 \end{cases}$	0,5
	vì $f(x) \in \mathbb{N}^*$ nên $f(x) = 2x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{N}^*$.	0,5
Bài 5 (5,0 điểm)	Bài 5: Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính không bằng nhau và cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi CD và EF là các tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (O) và (O'), trong đó C và E thuộc đường tròn (O); D và F thuộc đường tròn (O'); các điểm A và C nằm cùng phía đối với đường thẳng OO'. Chứng minh rằng tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại A đi qua giao điểm của CD và OO'.	

BÀI	ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM	BIỂU ĐIỂM
Bài 6 (3,0 điểm)	Bài 6: Cho số nguyên dương n có ít nhất hai ước nguyên tố. Chứng minh rằng luôn tồn tại các số nguyên dương a, b, c không lớn hơn n sao cho đa thức $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 - x_2 \leq \frac{1}{n}$.	
	Ta cần tìm $k \leq \frac{n-1}{2}$ sao cho $k(k+1) \vdots n$. Gọi $n = r.s$ với $(r, s) = 1$ và $1 < r < n, 1 < s < n$. Theo định lý Trung Hoa, tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\begin{cases} k \equiv 0 \pmod{r} \\ k \equiv -1 \pmod{s} \end{cases} \text{ nên } k(k+1) \vdots rs = n.$	0,5
	+ Nếu $k \leq \frac{n-1}{2}$, chọn $a = n, b = 2k + 1, c = \frac{k(k+1)}{n}$. Khi đó $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ thỏa $a, b, c \leq n$ và $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 - x_2 \leq \frac{1}{n}$ (đpcm).	1,0
	+ Nếu $k > \frac{n-1}{2}$, chọn $k' = (n-1) - k < \frac{n-1}{2}$. Khi đó $\begin{cases} k' \equiv -1 \pmod{r} \\ k' \equiv 0 \pmod{s} \end{cases}$ suy ra $k'(k'+1) \vdots rs = n$.	0,5
	Chọn $a = n, b = 2k' + 1, c = \frac{k'(k'+1)}{n}$. Rõ ràng $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ thỏa $a, b, c \leq n$ và $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 - x_2 \leq \frac{1}{n}$ (đpcm).	1,0

Lưu ý khi chấm: (GỢI Ý)

- Giám khảo chấm điểm thành phần rồi cộng lại thành **Điểm bài thi**.
- **Điểm bài thi** không làm tròn, mà giữ nguyên đến hai chữ số thập phân.
- Nếu thí sinh có cách giải khác mà đúng thì vẫn cho điểm tương ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.

----- HẾT -----