

Câu 1. (1,5 điểm) Với $x > 0$, cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \frac{1 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 64$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 82$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y(y - x) = 2x^2 + 3x + 1 \\ \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y + 7} = 7y - 3x^2 + 1 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$ với m là tham số.

Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên (x, y) của phương trình: $xy - x + 3y = 6$.

Câu 4. (0,5 điểm) Cho tập hợp $A = \{201; 203; \dots; 2021; 2023\}$ gồm 912 số tự nhiên lẻ. Cần chọn ra ít nhất bao nhiêu số từ tập hợp A sao cho trong các số được chọn luôn tồn tại hai số có tổng bằng 2288?

Câu 5. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ đường cao AD, BE, CF của tam giác đó. Gọi H là giao điểm của các đường cao vừa vẽ. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH và BC .

a) Chứng minh rằng $DMFN$ là tam giác vuông.

b) Chứng minh $DFMN : DFAC$.

c) Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc từ M, N đến đường thẳng DF . Chứng minh rằng giao điểm của FE và MN thuộc đường tròn đường kính PQ .

Câu 6. (0,5 điểm) Cho a, b là 2 số thực dương.

a) Chứng minh rằng $\sqrt{(1+a)(1+b)^3} \geq 1 + \sqrt{ab}$.

b) Cho $a + b = ab$ thỏa mãn $a^2 + 3a - b^3 \geq 0$ và $b^2 + 3b - a^3 \geq 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{a^2 + 3a - b} + \frac{1}{b^2 + 3b - a} + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$.

----- Hết -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (1,5 điểm) Với $x > 0$, cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \frac{1 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$.

- a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 64$.
- b) Rút gọn biểu thức B .
- c) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Lời giải

- a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 64$.

Ta có: $x = 64$ (thỏa mãn điều kiện $x > 0$). Khi đó:

$$A = \frac{\sqrt{64} - 1}{\sqrt{64}} = \frac{8 - 1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Vậy $A = \frac{7}{8}$ khi $x = 64$.

- b) Rút gọn biểu thức B .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } B &= \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \frac{1 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{x - 1 - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}. \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$ với $x > 0$.

- c) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

$$\text{Ta có: } \frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} > \frac{3}{2}$$

$$\frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} > \frac{3}{2}$$

(ĐKXĐ: $x > 0$ và $x \neq 1$)

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} + 2 - 3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x} > 0 \text{ (vì } x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4.$$

Kết hợp điều kiện, ta được $0 < x < 4$ và $x \neq 1$.

Vậy $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$ khi $0 < x < 4$ và $x \neq 1$.

Câu 2. (2,0 điểm)

- a) Giải phương trình: $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 82$.

- b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y(y - x) = 2x^2 + 3x + 1 \\ \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y + 7} = 7y - 3x^2 + 1 \end{cases}$$

Lời giải

a) Giải phương trình: $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 82$.

Đặt $x+4=t$. Khi đó phương trình trở thành: $(t-1)^4 + (t+1)^4 = 82$

$$\hat{U} \quad t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 = 82$$

$$\hat{U} \quad t^4 + 6t^2 - 40 = 0 \quad \hat{U} \quad (t^2 + 10)(t^2 - 4) = 0$$

$$\hat{U} \quad t^2 = 4 \quad (\text{vì } t^2 + 10 > 0 \quad \forall t)$$

$$\hat{U} \quad \begin{cases} t = 2 \Rightarrow x = -2 \\ t = -2 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

Vậy $S = \{-2; -6\}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y(y-x) = 2x^2 + 3x + 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y+7} = 7y - 3x^2 + 1 & (2) \end{cases}$

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y+7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{PT (1)} \quad \hat{U} \quad 2x^2 + xy - y^2 + 3x + 1 = 0 \quad \hat{U} \quad (x+y)(2x-y) + (x+y) + (2x-y) + 1 = 0$$

$$\hat{U} \quad (x+y+1)(2x-y+1) = 0 \quad \hat{U} \quad y = 2x+1 \quad (\text{vì } x+y \geq 0 \text{ nên } x+y+1 > 0).$$

Thay vào phương trình (2), ta được:

$$\sqrt{x+2x+1} - \sqrt{x-2x-1+7} = 14x+7-3x^2+1$$

$$\hat{U} \quad \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x+1} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \quad (\text{ĐKXD: } -\frac{1}{3} \leq x \leq 5)$$

$$\hat{U} \quad (\sqrt{3x+1} - 4) - (\sqrt{6-x} - 1) + 3x^2 - 14x - 5 = 0$$

$$\hat{U} \quad \frac{3x+1-16}{\sqrt{3x+1}+4} - \frac{6-x-1}{\sqrt{6-x}+1} + (x-5)(3x+1) = 0$$

$$\hat{U} \quad (x-5) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1 \right) = 0$$

$$\text{Vì } x \geq -\frac{1}{3} \text{ nên } \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1 > 0$$

Do đó $x=5 \Rightarrow y=11$ (thỏa mãn).

Vậy $(x, y) = (5; 11)$.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$ với m là tham số.

Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên (x, y) của phương trình: $xy - x + 3y = 6$.

Lời giải

a) Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$ với m là tham số.

Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\frac{1}{2}x^2 = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 2 = 0 \quad (1)$$

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(1)(m^2 - 2m - 2) = 2m + 2$

Để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 2m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$$

Với $m > -1$ có 2 nghiệm phân biệt. Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m^2 - 2m - 2 \end{cases}.$$

Ta có: $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$

$$\Leftrightarrow (2m)^2 - 4(m^2 - 2m - 2) = 4 \Leftrightarrow 2m + 2 = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} (tm).$$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên (x, y) của phương trình: $xy - x + 3y = 6$.

Ta có: $xy - x + 3y = 6 \Leftrightarrow x(y - 1) + 3(y - 1) = 3 \Leftrightarrow (x + 3)(y - 1) = 3$.

Vì x, y nguyên nên ta có các trường hợp sau:

$x + 3$	- 3	- 1	1	3
$y - 1$	- 1	- 3	3	1
x	- 6	- 4	- 2	0
y	0	- 2	4	2

Vậy $(x, y) = (-6; 0), (-4; -2), (-2; 4), (0; 2)$.

Câu 4. (0,5 điểm) Cho tập hợp $A = \{201; 203; \dots; 2021; 2023\}$ gồm 912 số tự nhiên lẻ. Cần chọn ra ít nhất bao nhiêu số từ tập hợp A sao cho trong các số được chọn luôn tồn tại hai số có tổng bằng 2288?

Lời giải

Xét các cặp số (a, b) trong tập hợp A có tổng bằng 2288 là:

$$(2023; 265), (2021; 267), (2019; 269), \dots, (1147; 1141), (1145; 1143)(*)$$

Số các cặp số (a, b) trong tập hợp A có tổng bằng 2288 là:

$$\frac{2023 - 1145}{2} + 1 = 440.$$

Số các số trong tập hợp A mà không có số ghép đôi để tổng bằng 2288 là:

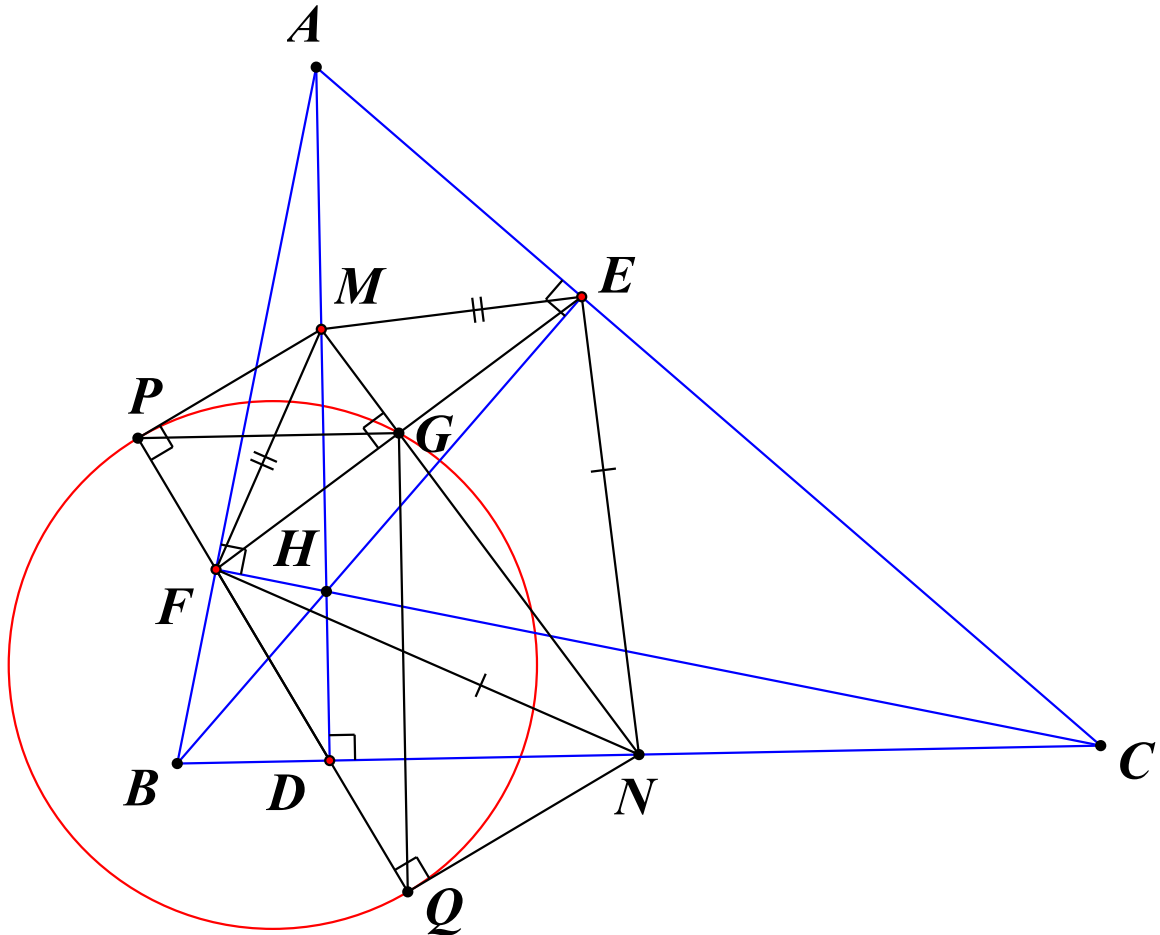
$$912 - 2 \cdot 440 = 32.$$

Chọn ra 441 số từ (*), theo Dirichlet tồn tại một nhóm chứa 2 số có tổng bằng 2288.

Vậy cần chọn ít nhất $441 + 32 = 473$ số từ tập hợp A luôn tồn tại hai số có tổng bằng 2288.

- Câu 5. (3,0 điểm)** Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ đường cao AD, BE, CF của tam giác đó. Gọi H là giao điểm của các đường cao vừa vẽ. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH và BC .
- a) Chứng minh rằng $DMFN$ là tam giác vuông.
- b) Chứng minh $DFMN : DFAC$.
- c) Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc từ M, N đến đường thẳng DF . Chứng minh rằng giao điểm của FE và MN thuộc đường tròn đường kính PQ .

Lời giải



- a) Chứng minh rằng $DMFN$ là tam giác vuông.
- Ta có các tam giác FHA và tam giác FBC là các tam giác vuông nên có
- $$FM = MA = \frac{AH}{2} \text{ và } FN = NB = \frac{BC}{2} \text{ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)}$$
- ↳ $\hat{MFA} = \hat{BAD}$ và $\hat{NFB} = \hat{DBA}$
- ↳ $\hat{MFA} + \hat{NFB} = \hat{BAD} + \hat{DBA} = 90^\circ$ (vì tam giác BAD vuông tại D)
- ↳ $\hat{MFN} = 180^\circ - \hat{MFA} - \hat{NFB} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ↳ $DMFN$ là tam giác vuông
- b) Chứng minh $DFMN : DFAC$.
- +) Xét $DBFC$ và $DHFA$ có:
- $$\hat{AFH} = \hat{BFC} = 90^\circ$$
- $$\hat{FAH} = \hat{FCB} \text{ (cùng phụ } \hat{ABC} \text{)}$$
- ↳ $DBFC : DHFA(g.g)$
- ↳ $\frac{AH}{AF} = \frac{BC}{FC}$ ↳ $\frac{2AM}{AF} = \frac{2CN}{FC}$ ↳ $\frac{AM}{AF} = \frac{CN}{FC}$.

+) Xét $\triangle AMF$ và $\triangle CNF$ có:

$$\frac{AM}{AF} = \frac{CN}{FC} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\angle FAH = \angle FCB \text{ (cùng phụ } \angle ABC)$$

$$\Rightarrow \triangle AMF \sim \triangle CNF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \frac{FM}{AF} = \frac{FN}{FC}$$

+) Xét $\triangle FMN$ và $\triangle FAC$ có:

$$\frac{FM}{AF} = \frac{FN}{FC} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\angle AFC = \angle MFN (= 90^\circ)$$

$\Rightarrow \triangle FMN \sim \triangle FAC \text{ (c.g.c)}.$

Cách khác: Ta có: $MF = ME = \frac{1}{2}AH$ và $NF = NE = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow MN$ là đường trung trực của FE

mà $DNFE$ cân tại N ($NF = NE$)

$\Rightarrow MN$ đồng thời là đường phân giác của $\angle FNE$

$$\Rightarrow \angle FNM = \frac{1}{2}\angle FNE \quad (3)$$

+) Ta có: tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm N (chứng minh câu a)

$$\angle FCE = \frac{1}{2}\angle FNE \text{ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung } FE) \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra $\angle FNM = \angle FCE = \frac{1}{2}\angle FNE$. $\Rightarrow \triangle FMN \sim \triangle FAC \text{ (c.g.c)}$

Ý c)

Gọi G là giao điểm của MN và FE $\Rightarrow MN \perp FE$ tại G (do $NF = NE = \frac{BC}{2}$ và

$$MF = ME = \frac{AH}{2} \text{ nên } MN \text{ là đường trung trực của } EF)$$

+) Ta có: Tứ giác $MPFG$ nội tiếp ($\angle MPF + \angle MGF = 180^\circ$)

$$\Rightarrow \angle GPF = \angle GMF.$$

+) Ta có: Tứ giác $GFQN$ nội tiếp ($\angle FGN + \angle FQN = 180^\circ$)

$$\Rightarrow \angle GQF = \angle GNF$$

Cộng lại ta được $\angle GPF + \angle GQF = \angle GMF + \angle GNF = 90^\circ$ (vì tam giác MFN vuông ở F)

$\Rightarrow \angle PGQ = 90^\circ$. Vậy giao điểm của FE và MN thuộc đường tròn đường kính PQ .

Câu 6. (0,5 điểm) Cho a, b là 2 số thực dương.

a) Chứng minh rằng $\sqrt{(1+a)(1+b)} \geq 1 + \sqrt{ab}$.

b) Cho $a + b = ab$ thỏa mãn $a^2 + 3a - b^3 \geq 0$ và $b^2 + 3b - a^3 \geq 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{a^2 + 3a - b} + \frac{1}{b^2 + 3b - a} + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$.

Lời giải

a) Chứng minh rằng $\sqrt{(1+a)(1+b)^3} \geq 1 + \sqrt{ab}$.

Ta có: $\sqrt{(1+a)(1+b)^3} \geq 1 + \sqrt{ab} \Leftrightarrow 1+a+b+ab^3 \geq 1+ab+2\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b$.

b) Cho $a + b = ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2 + 3a - b} + \frac{1}{b^2 + 3b - a} + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, ta có:

$$\frac{1}{a^2 + 3a - b} + \frac{1}{b^2 + 3b - a} \geq \frac{4}{(a^2 + 3a - b) + (b^2 + 3b - a)} = \frac{4}{a^2 + b^2 + 2(a+b)}$$

$$\frac{1}{a^2 + 3a - b} + \frac{1}{b^2 + 3b - a} \geq \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{4}{(a+b)^2} \quad (\text{vì } a+b=ab)$$

Mặt khác $\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} \geq 1 + ab = 1 + (a+b)$ (theo câu a)

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{4}{(a+b)^2} + 1 + (a+b) = \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{a+b}{16} + \frac{a+b}{16} + \frac{7(a+b)}{8} + 1$$

+) Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho 3 số dạng $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$, ta có:

$$\frac{4}{(a+b)^2} + \frac{a+b}{16} + \frac{a+b}{16} \geq 3\sqrt[3]{\frac{4}{(a+b)^2} \times \frac{a+b}{16} \times \frac{a+b}{16}} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

+) Ta có: $a + b = ab \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq (a+b)^2 - 4(a+b)^3 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a+b)(a+b-4)^3 \geq 0 \Leftrightarrow a+b \geq 4$ (vì $a, b > 0$ nên $a+b > 0$)

$$P \geq \frac{7(a+b)}{8} \geq \frac{7}{2} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $P \geq \frac{3}{4} + \frac{7}{2} + 1 = \frac{21}{4}$.

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{21}{4}$ khi $a = b = 2$.

----- Hết -----